全射な曲線と単射な曲線

yamyamtopo

概要

本稿では、任意の連結かつ局所連結なコンパクト距離空間が単位閉区間の連続像となることを主張する Hahn-Mazurkiewicz の定理の証明を紹介する。また、これと同様のテクニックにより示される「弧状連結な Hausdorff 空間の任意の異なる二点は単射な道によって結べる」という定理の証明も紹介する。

本稿では、単位閉区間 $I = [0, 1]$ の連続像となる (Hausdorff) 空間を特徴づける定理である Hahn-Mazurkiewicz の定理を証明する。

まず、この定理を述べるのに必要な用語を確認する。コンパクトかつ連結な距離化可能空間のことを**連続体 (continuum)** と呼ぶ[*1]。位相空間 X が点 $x \in X$ において**局所連結**であるとは、x の任意の近傍 U に対して、x の連結開近傍 V で $V \subset U$ となるものが存在することをいう。X がすべての点において局所連結であるとき、X は**局所連結**であるという。

定理 A (Hahn-Mazurkiewicz の定理 [1, 3])**.** X を Hausdorff 空間とするとき、連続な全射 $f\colon I \to X$ が存在するためには、X が局所連結な連続体であることが必要十分である。

I から正方形 I^2 への連続な全射が存在することは G. Peano により 1890 年に指摘され (Peano 曲線)、次元の概念の再考を促すことになった[*2]。このことと上の定理にちなんで、局所連結な連続体のことを **Peano 連続体**と呼ぶことがある。

また、Hahn-Mazurkiewicz の定理の証明手法によって、次の興味深い定理を証明できるので、それも合わせて述べる。

定理 B. X が弧状連結な Hausdorff 空間であるとき、X の任意の異なる二点 a, b に対して、連続な単射 $f\colon I \to X$ で $f(0) = a$, $f(1) = b$ を満たすものが存在する。

[*1] 本稿では、連結性および弧状連結性の定義に空でないことを含める。よって、とくに連続体は空ではない。また、正規および正則空間は Hausdorff 性を仮定し、近傍は開近傍であるとは限らないとする。

[*2] 「トポロジーいろいろ」内の「次元論 PDF」を参照。

1 全射な曲線：易しい方向

まず、Hahn-Mazurkiewicz の定理のうち易しい方向、つまり連続な全射 $f\colon I \to X$ が存在するとき X が局所連結連続体であることを確認しておこう。コンパクト性、連結性は連続像によって保たれる。したがって、X が距離化可能であることと、局所連結であることの二点が分かればよい。

まず、距離化可能性については、次の一般論からわかる。

命題 1.1. X を Hausdorff 空間とする。あるコンパクト距離空間 K から X への連続な全射が存在すれば、X は距離化可能である。

証明. 良く知られた Urysohn の距離化定理「正則空間が第二可算であれば距離化可能である」を用いよう。$f\colon K \to X$ をコンパクト距離空間 K からの連続な全射とする。X は K の連続像としてコンパクトな Hausdorff 空間だから、正規空間、とくに正則空間である。よって、あとは X が第二可算であることをみればよい。

K はコンパクトな距離空間なので、第二可算である。そこで、$\mathcal{U}$ を K の可算開基の一つとし、X の部分集合族 $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B} = \left\{ X \setminus f\left(K \setminus \bigcup \mathcal{U}'\right) \,\middle|\, \mathcal{U}' \text{ は } \mathcal{U} \text{ の有限部分集合} \right\}$$

で定める。$\bigcup \mathcal{U}'$ は集合族 $\mathcal{U}'$ のメンバーすべての和集合を表す記号である。$\mathcal{U}$ の有限部分集合の全体は可算だから、$\mathcal{B}$ は可算である。また、f はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像だから閉写像であり、よって $\mathcal{B}$ は X の開集合からなる族である。

$\mathcal{B}$ が X の開基であることを示そう。そのため、$x \in X$ と x の開近傍 U を任意に与える。$f^{-1}(x) \subset K$ はコンパクトであり、$f^{-1}(U)$ はその開近傍であるから、ある有限な $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ に対して、$f^{-1}(y) \subset \bigcup \mathcal{U}' \subset f^{-1}(U)$ となる。すると、$B = X \setminus f(K \setminus \bigcup \mathcal{U}')$ とおくとき $B \in \mathcal{B}$ であるが、f の全射性に注意すると $x \in B \subset U$ が分かる。よって、$\mathcal{B}$ は X の可算な開基となるので、X は第二可算である。 □

局所連結性については、次の言い換えが良く知られている。

命題 1.2. 位相空間 X に対して、次は同値である。

(1) X は局所連結である。

(2) X の任意の開集合 U に対して、U の各連結成分は開集合である。

証明. (1)$\Longrightarrow$(2): X が局所連結であるとし、$U \subset X$ を開集合とする。C を U の連結成分とし、$x \in C$ としよう。いま、U は x の開近傍なので、X の局所連結性により、$x \in V \subset U$ を満たす X の連結開集合 V が存在する。C は x の U における連結成分なので、$V \subset C$ である。よって、C は X の開集合である。

(2)$\Longrightarrow$(1): (2) を仮定し、$x \in X$ とし、U を x の開近傍とする。V を、x の U における連結成分とすれば、(2) により、V は開集合なので、x の連結開近傍を与え、もちろん $V \subset U$ である。 $\square$

この命題から、次が分かる。

命題 1.3. X を位相空間とする。ある局所連結な位相空間 Y からの全射かつ連続な閉写像 $f\colon Y \to X$ が存在すれば、X は局所連結である。

証明. そのような $f\colon Y \to X$ を一つ固定する。X について、命題 1.2(2) の条件を示せばよい。そのため、U を X の開集合とする。C を U の連結成分とし、$x \in C$ とする。各 $y \in f^{-1}(x)$ に対して、$f^{-1}(U)$ は y の開近傍なので、Y の局所連結性により連結開集合 W_y で $y \in W_y \subset f^{-1}(U)$ となるものが選べる。すると、$V = \bigcup_{y \in f^{-1}(x)} f(W_y)$ は $x \in V \subset U$ を満たす連結集合である。C は U における x の連結成分なので、$V \subset C$ である。さらに、$f\colon Y \to X$ は全射閉写像なので、$V' = X \setminus f(Y \setminus \bigcup_{y \in f^{-1}(x)} W_y)$ は x の開近傍で、V に含まれ、よって C に含まれる。以上から、C は X の開集合である。 $\square$

単位閉区間 I はもちろん局所連結である。また、I はコンパクトだから、$f\colon I \to X$ を Hausdorff 空間 X への連続全射とすると、f は閉写像であり、よって命題 1.3 により X は局所連結となる。これで、Hahn-Mazurkiewicz の定理（定理 A）の易しい方向の証明が終わった。なお、命題 1.3 を応用して、すべてのホモトピー群が自明だが可縮ではない位相空間の例を挙げることができる。本稿末尾の**「余談：ワルシャワの円」**を参照。

2 全射な曲線：難しい方向

次に、Hahn-Mazurkiewicz の定理の本質的な部分、つまり難しい方向である「任意の局所連結な連続体 X は単位閉区間の連続像である」という主張を証明する。

証明のアイディアをまず簡単に述べる。X の中に、X 全体に行きわたるような開集合の鎖をつくる。開集合の鎖とは、隣同士はかならず交わるような開集合の有限列である。そのような鎖をどんどん細く絞っていった極限として、X のすべての点を通る道を構成する。

さて、証明をきちんと述べるのに必要な概念を整理しておく。X を位相空間とするとき、X の空でない開集合の有限列 $(U_i)_{i=1}^n$（ただし、$n \geqq 1$）であって、各 $i < n$ に対して $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ を満たすものを、X 内の**開集合の鎖**、あるいは単に**鎖**という。さらに、X の開被覆 $\mathcal{U}$ が与えられているとき、各 i に対して $U_i \in \mathcal{U}$ であるような X 内の鎖 $(U_i)_{i=1}^n$ を **$\mathcal{U}$ 上の鎖**という。また、$a, b \in X$ のとき、$a \in U_1$ かつ $b \in U_n$ であるような X 内の鎖 $(U_i)_{i=1}^n$ を、**a から b への鎖**という。

命題 2.1. X を連結な位相空間とし、$\mathcal{U}$ を X の開被覆とする。このとき、任意の $a, b \in X$ に対して、a から b への $\mathcal{U}$ 上の X 内の鎖が存在する。

証明. X 上の関係 $\sim$ を、$x \sim y$ であるとは x から y への $\mathcal{U}$ 上の X 内の鎖が存在すること、として定義する。$\sim$ は直ちに分かる通り同値関係である。このとき $\sim$ に関する同値類がただ一つであることを証明すればよい。X は連結であるから、そのためには、$\sim$ に関する各同値類が開集合であることを示せば十分である。$C \subset X$ を $\sim$ についての同値類とし、$x \in C$ とする。$\mathcal{U}$ は被覆なので、$x \in U_1$ となる $U_1 \in \mathcal{U}$ が存在する。各 $y \in U_1$ に対して、一つの開集合からなる鎖 $(U_i)_{i=1}^1$ は x から y への $\mathcal{U}$ 上の鎖であるので、$x \sim y$ であり、よって $y \in C$ である。したがって、$U_1 \subset C$ であるので、C は開集合である。 □

命題 2.2. (X, d) を連結かつ局所連結な局所コンパクト距離空間、$K \subset X$ をコンパクト集合とし、$a, b \in K$ とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ および $a, b \in X$ に対して、a から b への X 内の鎖 $(U_i)_{i=1}^n$ であって、

- $\operatorname{diam} U_i < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$[*3]
- U_i は連結で、閉包 $\operatorname{Cl} U_i$ はコンパクト $(i = 1, \ldots, n)$
- $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$

証明. X は局所連結かつ局所コンパクトな距離空間なので、

$$\mathcal{U} = \{U \subset X \,|\, U \text{ は連結な開集合、} \operatorname{Cl} U \text{ はコンパクトで } \operatorname{diam} U < \varepsilon\}$$

は X の開被覆である。K のコンパクト性から、ある有限な $\{V_1, \ldots, V_m\} \subset \mathcal{U}$（ただし、$m \geqq 2$, $a \in V_1$, $b \in V_m$）に対して、$K \subset \bigcup_{j=1}^m V_j$ である。

各 j に対して、点 $p_j \in V_j$ をえらび固定する。ただし、$p_1 = a$, $p_m = b$ とする。各 $j < m$ に対して、前の命題 2.1 を適用すれば、p_j から p_{j+1} への $\mathcal{U}$ 上の X 内の鎖 $\mathcal{C}_j = (U_i^j)_{i=1}^{n_j}$ が得られる。さらに、各 $j < m$ に対して、必要なら $\mathcal{C}_j$ の先頭に V_j を付け

*3 距離空間 $X = (X, d)$ の空でない部分集合 A に対して $\operatorname{diam} A = \sup\{d(a, a') \,|\, a, a' \in A\}$ とする。

加えることで、$U_1^j = V_j$ が成り立つようにできる。また同様に、必要なら $\mathcal{C}_{m-1}$ の末尾に V_m を付け加えることで、$U_{n_{m-1}}^{m-1} = V_m$ とできる。$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{m-1}$ をつないで得られる a から b への鎖が求めるものである。 $\square$

位相空間 X 内の鎖 $(U_i)_{i=1}^n$ が**単純な鎖**であるとは、$|i-j| \geqq 2$ ならば $\mathrm{Cl}\, U_i \cap \mathrm{Cl}\, U_j = \emptyset$ であることをいう。この概念は、後の定理 B の証明で重要となる。

命題 2.3. (X, d) を距離空間、$a, b \in X$ とする。各 $k \geqq 1$ に対して、a から b への鎖 $\mathcal{C}_k = (U_i^k)_{i=1}^{n_k}$ および関数 $\varphi_k \colon \{0, 1, \dots, n_k\} \to \{0, 1, \dots, n_{k+1}\}$ が与えられ、次を満たすとする。

(i) $\mathrm{diam}\, U_i^k < 2^{-k}$ であり、$\mathrm{Cl}\, U_i^k$ はコンパクト
(ii) $\varphi_k(0) = 0,\ \varphi_k(n_k) = n_{k+1} \quad (k \geqq 1)$
(iii) $\varphi_k(i) - \varphi_k(i-1) \geqq 2 \quad (k \geqq 1,\ 1 \leqq i \leqq n_k)$
(iv) $\varphi_k(i-1) < j \leqq \varphi_k(i)$ のとき、$U_j^{k+1} \subset U_i^k \quad (k \geqq 1,\ 1 \leqq i \leqq n_k)$

このとき、連続写像 $f \colon I \to X$ であって、$f(0) = a,\ f(1) = b$ かつ

$$f(I) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \mathrm{Cl}\, U_i^k$$

を満たすものが存在する。さらに、各 k に対して $\mathcal{C}_k$ が単純な鎖であるならば、f は単射に取れる。

証明. 一般に、$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ を満たす有限列 $\boldsymbol{t} = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ を分割と呼ぶことにし、$\delta(\boldsymbol{t}) = \max\{t_i - t_{i-1} \mid i = 1, \dots, m\}$ とおく。

各 $k \geqq 1$ に対して帰納的に、分割 $\boldsymbol{t}_k = (t_0^k, t_1^k, \dots, t_{n_k}^k)$ を定義しよう。まず、分割 $\boldsymbol{t}_1$ を、「n_1 等分割」とする。つまり、$t_i^1 = i/n_1\ (0 \leqq i \leqq n_1)$, $\boldsymbol{t}_1 = (t_0^1, t_1^1, \dots, t_{n_1}^1)$ とする。

$\boldsymbol{t}_k$ が定まったとして、分割 $\boldsymbol{t}_{k+1} = (t_0^{k+1}, t_1^{k+1}, \dots, t_{n_{k+1}}^{k+1})$ を $\boldsymbol{t}_k$ の「細分」となるように定めたい。$t_j^{k+1}\ (j = 0, 1, \dots, n_{k+1})$ を次で定めよう。まず、(iii)(iv) によって

$$0 = \varphi_k(0) < \cdots < \varphi_k(i-1) < \varphi_k(i) < \cdots < \varphi_k(n_k) = n_{k+1}$$

であることに注意し、各 $i \in \{0, 1, \dots, n_k\}$ に対して、$t_{\varphi_k(i)}^{k+1} = t_i^k$ とする。$\varphi_k(i-1) < j < \varphi_k(i)$ のときは、t_j^{k+1} たちを t_{i-1}^k と t_i^k の間を等分するように定める。すなわち、$1 \leqq i \leqq n_k,\ \varphi_k(i-1) < j < \varphi_k(i)$ のとき

$$t_j^{k+1} = t_{i-1}^k + \frac{j - \varphi_k(i-1)}{\varphi_k(i) - \varphi_k(i-1)}(t_i^k - t_{i-1}^k)$$

とする。これで、分割 $\boldsymbol{t}_{k+1} = (t_0^{k+1}, t_1^{k+1}, \ldots, t_{n_{k+1}}^{k+1})$ が定義された。(iii) の条件 $\varphi_k(i) - \varphi_k(i-1) \geqq 2$ により、$\delta(\boldsymbol{t}_{k+1}) \leqq \delta(\boldsymbol{t}_k)/2$ である。

以上で、分割 $\boldsymbol{t}_k$ の帰納的構成が終わった。このとき $\delta(\boldsymbol{t}_k) \leqq 2^{-(k-1)}$ なので、$\lim_{k\to\infty} \delta(\boldsymbol{t}_k) = 0$ である。

次に、連続写像 $f\colon I \to X$ を定義するために、そのグラフを $I \times X$ の部分集合として構成することを考えよう。各 $k \geqq 1$ に対して、$\Gamma_k \subset I \times X$ を

$$\Gamma_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} [t_{i-1}^k, t_i^k] \times \operatorname{Cl} U_i^k$$

で定義し、$\Gamma = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ とする。この Γ が求める写像 f のグラフであることを示したい。

主張 1. 各 $k \geqq 1$ に対して、$\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k$ である。

主張 1 の証明. $j \in \{1, 2, \ldots, n_{k+1}\}$ とする。すると、$\varphi_k(i-1) < j \leqq \varphi_k(i)$ となるような $i \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$ がただ一つ定まり、このとき帰納的定義のしかたから $[t_{j-1}^{k+1}, t_j^{k+1}] \subset [t_{i-1}^k, t_i^k]$ である。また、仮定から $U_j^{k+1} \subset U_i^k$ である。以上より、$[t_{j-1}^{k+1}, t_j^{k+1}] \times \operatorname{Cl} U_j^{k+1} \subset [t_{i-1}^k, t_i^k] \times \operatorname{Cl} U_i^k \subset \Gamma_k$ となるから、$\Gamma_{k+1} \subset \Gamma_k$ である。 □

以下では、$A \subset I \times X$ と $t \in I$ に対して、$A[t] = \{x \in X \mid (t, x) \in A\}$ とおく。

主張 2. 各 $t \in I$ に対して、$\Gamma[t] \neq \emptyset$ である。

主張 2 の証明. $t \in I$ とする。各 k に対して、Γ_k の定義から明らかに $\Gamma_k[t] \neq \emptyset$ である。Γ_k のコンパクト性から $\Gamma_k[t]$ もコンパクトであり、主張 1 より $\Gamma_k[t] \supset \Gamma_{k+1}[t]$ が成り立つので、$\Gamma[t] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k[t] \neq \emptyset$ である。 □

主張 3. 各 $t \in I$ に対して、$\Gamma[t]$ はちょうど一個の点からなる。すなわち、Γ は I から X への写像のグラフである。

主張 3 の証明. $t \in I$ とする。主張 2 により、$\operatorname{diam} \Gamma[t] = 0$ を言えば十分である。$\Gamma[t] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k[t]$ であるから、そのためには、各 $k \geqq 1$ に対して、$\operatorname{diam} \Gamma[t] < 2^{-(k-1)}$ を証明すれば十分である。(i) $t \notin \{t_1^k, \ldots, t_{n_k-1}^k\}$ であるときは、$t \in [t_{i-1}^k, t_i^k]$ であるような $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ がただ一つに定まる。この i に対して、$\Gamma_k[t] = \operatorname{Cl} U_i^k$ であるから、$\operatorname{diam} \Gamma_k[t] = \operatorname{diam} \operatorname{Cl} U_i^k < 2^{-k} < 2^{-(k-1)}$ である。(ii) ある $i \in \{1, \ldots, n_k - 1\}$ に対して $t = t_i^k$ であるときは、$\Gamma_k[t] = \operatorname{Cl} U_i^k \cup \operatorname{Cl} U_{i+1}^k$ である。これと $U_i^k \cap U_{i+1}^k \neq \emptyset$ により、$\operatorname{diam} \Gamma_k[t] \leqq \operatorname{diam} \operatorname{Cl} U_i^k + \operatorname{diam} \operatorname{Cl} U_{i+1}^k < 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1}$ である。 □

そこで、Γ をグラフとする写像を $f\colon I \to X$ とする。各 $k \geqq 1$ に対して $(0,a) \in \Gamma_k$, $(1,b) \in \Gamma_k$ がすぐに分かるから、$f(0)=a$, $f(1)=b$ である。

f は連続写像である。これを示すため、射影 $\mathrm{pr}_I\colon I \times X \to I$, $\mathrm{pr}_X\colon I \times X \to X$ を考えよう。制限 $\mathrm{pr}_I|_\Gamma\colon \Gamma \to I$ はコンパクト空間 Γ から Hausdorff 空間 I への連続全単射だから同相写像である。そこで、f を合成 $(\mathrm{pr}_X|_\Gamma) \circ (\mathrm{pr}_I|_\Gamma)^{-1}$ と考えれば、f は連続写像の合成となるので連続である。

$f(I) = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{i=1}^{n_k} \mathrm{Cl}\, U_i^k$ を示そう。$f(I) = \mathrm{pr}_X(\Gamma)$, $\bigcup_{i=1}^{n_k} \mathrm{Cl}\, U_i^k = \mathrm{pr}_X(\Gamma_k)$ なので、

$$\mathrm{pr}_X\left(\bigcap_{k=1}^\infty \Gamma_k\right) = \bigcap_{k=1}^\infty \mathrm{pr}_X(\Gamma_k)$$

を示せばよい。左辺は明らかに右辺に含まれる。逆の包含を示すため、$x \in \bigcap_{k=1}^\infty \mathrm{pr}_X(\Gamma_k)$ とすると、$(\Gamma_k \cap \mathrm{pr}_X^{-1}(x))_{k=1}^\infty$ は $I \times X$ の空でないコンパクト集合の減少列となるので、その共通要素 (t,x) が存在する。このとき、$(t,x) \in \bigcap_{k=1}^\infty \Gamma_k$ だから、$x = \mathrm{pr}_X(t,x)$ は左辺 $\mathrm{pr}_X(\bigcap_{k=1}^\infty \Gamma_k)$ に属する。

最後に、各 k に対して $\mathcal{C}_k$ が単純な鎖であるとして、f が単射であることを示そう。$0 \leqq t < t' \leqq 1$ とする。k を $\delta(\boldsymbol{t}_k) < (t'-t)/2$ となるように十分大きくとる。すると、$t \in [t_{i-1}^k, t_i^k]$, $t' \in [t_{i'-1}^k, t_{i'}^k]$ となるような任意の $i, i' \in \{1, \ldots, n_k\}$ に対して、$i' - i \geqq 2$ であり、よって $\mathrm{Cl}\, U_i^k \cap \mathrm{Cl}\, U_{i'}^k = \emptyset$ となる。したがって、$\Gamma_k[t] \cap \Gamma_k[t'] = \emptyset$ であるから、$f(t) \neq f(t')$ である。これで f の単射性が示された[*4]。 □

では準備が整ったので、Hahn-Mazurkiewicz の定理の証明（のうち残った難しい方向）にとりかかる。

Hahn-Mazurkiewicz の定理の証明. X を局所連結な連続体とし、X の位相に合致した距離 d を一つ定める。$a, b \in X$ を固定する。命題 2.3 の条件 (i)-(iv) を満たす a から b への鎖 $\mathcal{C}_k = (U_i^k)_{i=1}^{n_k}$ および関数 $\varphi_k\colon \{0,1,\ldots,n_k\} \to \{0,1,\ldots,n_{k+1}\}$ $(k \geqq 1)$ で、

(v) $\bigcup_{i=1}^{n_k} U_i^k = X \quad (k \geqq 1)$

を満たすようなものを構成すれば、命題 2.3 の結論の連続写像 $f\colon I \to X$ は $f(I) = X$ を満たすから定理は証明される。

[*4] この命題 2.3 の仮定での条件 (iii) $\varphi_k(i) - \varphi_k(i-1) \geqq 2$ を完全な形で使ったのは、$\delta(\boldsymbol{t}_{k+1}) \leqq \delta(\boldsymbol{t}_k)/2$ を結論するときだけで、その他の議論では (iii$'$) $\varphi_k(i-1) < \varphi_k(i)$ だけで十分である。このことから、命題 2.3 の仮定で (iii) を (iii$'$) に置きかえた場合でも、最後の部分「各 k に対して $\mathcal{C}_k$ が単純な鎖であるならば、f は単射に取れる。」を除けば結論は成り立っていると分かる。なお、Hahn-Mazurkiewicz の定理の証明では、単射性に関する主張は必要なく、したがって (iii) は (iii$'$) に置きかえて問題ない。

まず、命題 2.2 により、a から b への X 内の鎖 $\mathcal{C}_1 = (U_i^1)_{i=1}^{n_1}$ であって、各 U_i^1 は $\operatorname{diam} U_i^1 < 2^{-1}$ を満たす連結開集合で、$\operatorname{Cl} U_i^1$ はコンパクトで、$\bigcup_{i=1}^{n_1} U_i^1 = X$ となるものが存在する。

帰納的に、連結開集合からなる鎖 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ と $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ が条件 (i)-(v) を満たして構成されたとしよう。各 $i \in \{1, \ldots, n_k - 1\}$ に対して点 $p_i \in U_i^k \cap U_{i+1}^k$ を固定し、$p_0 = a$, $p_{n_k} = b$ とする。(v) より $\{U_i^k \mid 1 \leqq i \leqq n_k\}$ はコンパクト距離空間 X の開被覆なので、コンパクト集合による被覆 $\{K_i^k \mid 1 \leqq i \leqq n_k\}$ であって $\{p_{i-1}, p_i\} \subset K_i^k \subset U_i^k$ となるものが存在する。各 $i \in \{1, \ldots, n_k\}$ に対して、連結かつ局所連結な局所コンパクト距離空間 (U_i^k, d) に命題 2.2 を用いると、p_{i-1} から p_i への U_i^k 内の鎖 $\mathcal{C}_{k+1}(i) = (V_{i,l})_{l=1}^{m_i}$ で次の性質を満たすものが存在するとわかる。

- $\operatorname{diam} V_{i,l} < 2^{-(k+1)}$
- $V_{i,l}$ は連結で、その U_i^k での閉包、よって X での閉包 $\operatorname{Cl} V_{i,l}$ はコンパクト
- $K_i^k \subset \bigcup_{l=1}^{m_i} V_{i,l}$
- $m_i \geqq 2$ [*5]

そこで、鎖 $\mathcal{C}_{k+1}(1), \ldots, \mathcal{C}_{k+1}(n_k)$ をつないで、a から b への一つの X 内の鎖 $\mathcal{C}_{k+1} = (U_j^{k+1})_{j=1}^{n_{k+1}}$ をつくる。すなわち、$n_{k+1} = \sum_{i=1}^{n_k} m_i$ とし、関数 $\varphi_k \colon \{0, 1, \ldots, n_k\} \to \{0, 1, \ldots, n_{k+1}\}$ を $\varphi_k(i) = \sum_{\nu=1}^{i} m_\nu$ （ただし、$\varphi_k(0) = 0$）で定めるとき、

$$\varphi_k(i-1) < j \leqq \varphi_k(i) \quad \text{ならば} \quad U_j^{k+1} = V_{i, j-\varphi_k(i-1)}$$

とすることで、鎖 $\mathcal{C}_{k+1} = (U_j^{k+1})_{j=1}^{n_{k+1}}$ を定義する。すると、$\mathcal{C}_{k+1}$ は連結開集合からなる鎖であって、$\mathcal{C}_k$, $\mathcal{C}_{k+1}$, φ_k が (i)-(iv) を満たすことは定義から直ちにわかる。また、$X = \bigcup_{i=1}^{n_k} K_i^k \subset \bigcup_{i=1}^{n_k} \bigcup_{l=1}^{m_i} V_{i,l} = \bigcup_{j=1}^{n_{k+1}} U_j^{k+1}$ なので (v) も成り立つ。以上で帰納的構成が終わり、Hahn-Mazurkiewicz の定理の証明が完成した。 $\square$

3 単射な曲線

さて、弧状連結な Hausdorff 空間の異なる点が単射な道で結べるという冒頭の定理 B の話にうつる。証明の前に、ここでの Hausdorff 性の仮定が不可欠なものであることを確認しておこう。

[*5] これは命題 2.2 の (iii) に合わせるための条件だが、脚注*4 を踏まえれば、この条件は実際には必要ない。

例 3.1. 直積空間 $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ 上の同値関係 $\sim$ を、

$$(x,i)\sim(y,j) \iff x=y\neq 0 \text{ または } (x,i)=(y,j)$$

で定め、商空間 $X=\mathbb{R}\times\{0,1\}/\sim$ を考える。$\pi\colon \mathbb{R}\times\{0,1\}\to X$ を射影とすると、X の異なる二点 $p_0=\pi(0,0)$ と $p_1=\pi(0,1)$ は X において交わらない近傍をもたず、したがって X は Hausdorff 空間ではない。しかも、p_0 と p_1 を結ぶ道、つまり $f(0)=p_0$, $f(1)=p_1$ を満たす連続写像 $f\colon I\to X$ は、単射となり得ない。

> これを証明しよう。部分空間 $\{p_0,p_1\}\subset X$ は離散位相をもつから、$f(I)$ は p_0,p_1 以外の点 p を含み、それは $p=\pi(x,0)=f(t)$, $x\neq 0$, $0<t<1$ と表すことができる。連続写像 $h\colon X\to\mathbb{R}$ を $h(\pi(x,i))=x$ で定めると、$h\circ f|_{[0,t]}$, $h\circ f|_{[t,1]}$ にそれぞれ中間値の定理を用いて、$h\circ f(t')=h\circ f(t'')=x/2$, $0<t'<t<t''<1$ となる t',t'' が存在すると分かる。このとき $f(t')=f(t'')=\pi(x/2,0)$ となるから、f は単射でない。

定理 B の証明のための準備となることを、いくつか示しておく。

補題 3.2. X を局所連結な正則空間、$U\subset X$ を連結開集合とし、$a,b\in U$ とする。このとき、連結開集合 V で、$a,b\in V$ かつ $\mathrm{Cl}\,V\subset U$ となるものが存在する。

証明. X は局所連結な正則空間なので、

$$\mathcal{W}=\{W\subset U\mid W \text{ は連結開集合で } \mathrm{Cl}\,W\subset U\}$$

は U の開被覆である。命題 2.1 により、a から b への $\mathcal{W}$ 上の U 内の鎖 $(W_i)_{i=1}^n$ が存在する。$V=\bigcup_{i=1}^n W_i$ は求める連結開集合である。 □

次の命題は、単純な鎖の構成の基本的な道具である。

命題 3.3. 局所連結な正則空間 X 内の点 a から点 b への鎖 $(U_i)_{i=1}^n$ で、各 i に対して U_i が連結なものが与えられたとする。このとき、狭義単調増加列 $1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_m\leqq n$ と a から b への**単純な**鎖 $(V_k)_{k=1}^m$ であって、次を満たすものが存在する。

- V_k は連結で、$\mathrm{Cl}\,V_k\subset U_{i_k}$ $(k=1,\dots,m)$
- $a\notin\bigcup_{k=2}^m \mathrm{Cl}\,V_k$, $b\notin\bigcup_{k=1}^{m-1}\mathrm{Cl}\,V_k$ [*6]

証明. $(U_i)_{i=1}^n$ を a から b への鎖とする。まず、$i_1=\max\{i\mid a\in U_i\}$ と定義する。帰納的に、狭義単調増加列 $i_1<\cdots<i_k$ が定義されたとしよう。$b\in U_{i_k}$ であれば、$m=k$

[*6] $m=1$ である場合は、ここでの和集合は空集合と解釈する（ので、この条件は自動的に成り立つ）。これ以降、和集合の記号について同様の解釈をとる。

として構成を終わる。そうでないならば、$i_{k+1} = \max\{i \,|\, i_k < i \leqq n, U_i \cap U_{i_k} \neq \emptyset\}$ とする。

このようにして得られた列 $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqq n$ は、そのつくり方から、

- $a \notin \bigcup_{k=2}^{m} U_{i_k},\ b \notin \bigcup_{k=1}^{m-1} U_{i_k}$
- $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$
- $|k-l| \geqq 2$ ならば $U_{i_k} \cap U_{i_l} = \emptyset$

という性質をもつ。各 $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ に対して点 $p_k \in U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}}$ を固定し、さらに、$p_0 = a,\, p_m = b$ とする。補題 3.2 により、各 $k \in \{1, \ldots, m\}$ に対して、連結開集合 V_k で、$p_{k-1}, p_k \in V_k$ および $\mathrm{Cl}\, V_k \subset U_{i_k}$ を満たすものが存在する。すると、$(V_k)_{k=1}^m$ は $a = p_0$ から $b = p_m$ への求める性質をもった単純な鎖である。 □

次は、単純な鎖を構成する開集合の個数を増やすのに用いられる。

補題 3.4. (X, d) を連結かつ局所連結な局所コンパクト距離空間とし、F_1, F_2 は X の空でない閉集合で $d(F_1, F_2) > 0$ を満たすとする。このとき、X の連結開集合 $V_1, V_2 \subset X$ が存在して、次を満たす。

(1) $\mathrm{Cl}\, V_1,\, \mathrm{Cl}\, V_2$ はコンパクト
(2) $\mathrm{Cl}\, V_i \cap F_i \neq \emptyset\, (i = 1, 2),\ V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$
(3) $\mathrm{Cl}\, V_1 \cap F_2 = F_1 \cap \mathrm{Cl}\, V_2 = \emptyset$

証明. $\varepsilon = d(F_1, F_2) > 0$ とする。$p_1 \in F_1,\, p_2 \in F_2$ を固定すると、命題 2.2 により、p_1 から p_2 への X 内の鎖 $(U_i)_{i=1}^n$ であって、各 i に対して U_i は連結で、$\mathrm{Cl}\, U_i$ はコンパクトであり、しかも $\mathrm{diam}\, U_i < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるものが存在する。すると、各 i に対して $\mathrm{Cl}\, U_i \cap F_1 = \emptyset$ または $\mathrm{Cl}\, U_i \cap F_2 = \emptyset$ である。よって、$i_0 = \max\{i \,|\, \mathrm{Cl}\, U_i \cap F_1 \neq \emptyset\}$ とおけば $1 \leqq i_0 < n$ であり、$V_1 = \bigcup_{i=1}^{i_0} U_i$ および $V_2 = \bigcup_{i=i_0}^{n} U_i$ が条件を満たす。 □

定理 B の証明. X を弧状連結な Hausdorff 空間とし、$a, b \in X$ を異なる点とする。X の弧状連結性から、単射とは限らない連続写像 $g\colon I \to X$ であって、$g(0) = a,\ g(1) = b$ となるものが存在する。このとき、Hahn-Mazurkiewicz の定理（の易しい方向）により、$g(I)$ は局所連結な連続体である。したがって、X を $g(I)$ に置き換えることによって、はじめから X を局所連結な連続体であるとしてよい。

X の位相に合致した距離 d を一つ固定する。$f(0) = a,\ f(1) = b$ を満たす単射な連続写像 $f\colon I \to X$ を構成したいが、そのためには、a から b への**単純な**鎖 $\mathcal{C}_k = (U_i^k)_{i=1}^{n_k}$ お

よび関数 $\varphi_k\colon \{0,1,\dots,n_k\} \to \{0,1,\dots,n_{k+1}\}$ $(k \geqq 1)$ で、命題 2.3 の条件：

(i) $\operatorname{diam} U_i^k < 2^{-k}$ であり、$\operatorname{Cl} U_i^k$ はコンパクト

(ii) $\varphi_k(0) = 0,\ \varphi_k(n_k) = n_{k+1} \quad (k \geqq 1)$

(iii) $\varphi_k(i) - \varphi_k(i-1) \geqq 2 \quad (k \geqq 1,\ 1 \leqq i \leqq n_k)$

(iv) $\varphi_k(i-1) < j \leqq \varphi_k(i)$ のとき、$U_j^{k+1} \subset U_i^k \quad (k \geqq 1,\ 1 \leqq i \leqq n_k)$

を満たすようなものを構成すればよい。さらに、ここでは追加の条件

(vi) $a \notin \bigcup_{i=2}^{n_k} \operatorname{Cl} U_i^k,\ \ b \notin \bigcup_{i=1}^{n_k-1} \operatorname{Cl} U_i^k$

も満たすように構成することにする。

命題 2.2 により、a から b への X 内の鎖 $\tilde{\mathcal{C}}_1 = (\tilde{U}_i^1)_{i=1}^{\tilde{n}_1}$ で、各 i に対して $\tilde{U}_i^1$ は閉包がコンパクトな連結集合で、$\operatorname{diam} \tilde{U}_i^1 < 2^{-1}$ となるものが存在する。この鎖 $\tilde{\mathcal{C}}_1$ に命題 3.3 を適用して得られる単純な鎖を $\mathcal{C}_1 = (U_i^1)_{i=1}^{n_1}$ とすれば、$\mathcal{C}_1$ は連結開集合からなり (i) と (vi) の条件を満たす。

帰納的に、連結開集合からなる単純な鎖 $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ と $\varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ が条件 (i)-(iv) および (vi) を満たして構成されたとしよう。まず、補題 3.4 を利用して、$\mathcal{C}_k$ の各開集合を「二分して」、2 倍の個数の開集合からなる単純な鎖 $\mathcal{C}'_k$ を作ろう。

各 $i \in \{1, \dots, n_k\}$ に対して、U_i^k の閉集合 $F_{i,1}, F_{i,2}$ を次で定義しよう。$i > 1$ のとき $F_{i,1} = U_i^k \cap \operatorname{Cl} U_{i-1}^k$ とし、$i < n_k$ のとき $F_{i,2} = U_i^k \cap \operatorname{Cl} U_{i+1}^k$ とする。また、$F_{1,1} = \{a\}$, $F_{n_k,2} = \{b\}$ とする。このとき、各 i に対して、連結かつ局所連結な局所コンパクト距離空間 (U_i^k, d) の閉集合 $F_{i,1}, F_{i,2}$ に対して補題 3.4 を適用して得られる U_i^k の連結開集合を V_{2i-1}, V_{2i} とする。すると、$\mathcal{C}'_k = (V_i)_{i=1}^{2n_k}$ は単純な鎖であり、$a \notin \bigcup_{i=2}^{2n_k} \operatorname{Cl} V_i$, $b \notin \bigcup_{i=1}^{2n_k-1} \operatorname{Cl} V_i$ を満たす。

次に、各 $i \in \{1, \dots, 2n_k - 1\}$ に対して点 $p_i \in V_i \cap V_{i+1}$ を固定し $p_0 = a$, $p_{2n_k} = b$ とする。各 $i \in \{1, \dots, 2n_k\}$ に対して、(V_i, d) に命題 2.2 を用いると、p_{i-1} から p_i への V_i 内の鎖 $\tilde{\mathcal{C}}_{k+1}(i) = (\tilde{V}_{i,l})_{l=1}^{m_i}$ で、各 $l \in \{1, \dots, m_i\}$ に対して次の性質を満たすものが得られる。

- $\operatorname{diam} \tilde{V}_{i,l} < 2^{-(k+1)}$
- $\tilde{V}_{i,l}$ は連結で、$\operatorname{Cl} \tilde{V}_{i,l}$ は V_i に含まれるコンパクト集合

$\tilde{\mathcal{C}}_{k+1}(1), \dots, \tilde{\mathcal{C}}_{k+1}(2n_k)$ を順につないで得られる a から b への X 内の鎖を $\tilde{\mathcal{C}}_{k+1} = (\tilde{U}_l^{k+1})_{l=1}^{\tilde{n}_{k+1}}$ とする。このとき、$\tilde{\mathcal{C}}_{k+1}$ に命題 3.3 を適用することにより、連結開集合からなる a から b への単純な鎖 $\mathcal{C}_{k+1} = (U_j^{k+1})_{j=1}^{n_{k+1}}$ と増加列 $1 \leqq l_1 < \dots < l_{n_{k+1}} \leqq \tilde{n}_{k+1}$ で

(a) $\mathrm{Cl}\, U_j^{k+1} \subset \tilde{U}_{l_j}^{k+1}$ $(j = 1, \dots, n_{k+1})$

(b) $a \notin \bigcup_{j=2}^{n_{k+1}} \mathrm{Cl}\, U_j^{k+1},\ b \notin \bigcup_{j=1}^{n_{k+1}-1} \mathrm{Cl}\, U_j^{k+1}$

となるものが得られる。(a) から $\mathrm{Cl}\, U_j^{k+1}$ はコンパクトで $\mathrm{diam}\, U_j^{k+1} < 2^{-(k+1)}$ となることが分かる。すなわち、$\mathcal{C}_{k+1}$ は (i) を満たす。(b) は、$\mathcal{C}_{k+1}$ が (vi) の条件を満たすことそのものである。あとは、(ii)(iii)(iv) を満たすように φ_k を作れればよい。

(a) および $\tilde{\mathcal{C}}_{k+1}$ の構成から、各 $j \in \{1, \dots, n_{k+1}\}$ に対して、$\alpha(j) \in \{1, \dots, 2n_k\}$ を $U_j^{k+1} \subset V_{\alpha(j)}$ となるように選び、（広義の）単調増加関数 α をつくることができる。

主張. $\alpha\colon \{1, \dots, n_{k+1}\} \to \{1, \dots, 2n_k\}$ は全射である。

主張の証明. $a \in U_1^{k+1} \subset V_{\alpha(1)}$ および $a \notin \bigcup_{i=2}^{2n_k} \mathrm{Cl}\, V_i$ により、$\alpha(1) = 1$ である。同様に、$\alpha(n_{k+1}) = 2n_k$ である。

α の全射性を示すため、$1 < i_0 < 2n_k$ とする。$\alpha(j) = i_0$ を満たす j が存在しないとして矛盾を導こう。このとき $j_0 = \max\{j \mid \alpha(j) < i_0\}$ とおき、$V' = \bigcup_{i=1}^{i_0} V_i, V'' = \bigcup_{i=i_0+1}^{2n_k} V_i$ とすれば、$U_{j_0}^{k+1} \subset V', U_{j_0+1}^{k+1} \subset V'',\ V' \cap V'' = \emptyset$ により、$U_{j_0}^{k+1} \cap U_{j_0+1}^{k+1} = \emptyset$ となり矛盾する。 □

$\beta\colon \{1, \dots, 2n_k\} \to \{1, \dots, n_k\}$ を、$\beta(2i-1) = \beta(2i) = i$ により定めれば

$$\gamma = \beta \circ \alpha\colon \{1, \dots, n_{k+1}\} \to \{1, \dots, n_k\}$$

は単調増加である。さらに、上の主張により、各 $i \in \{1, \dots, n_k\}$ に対して $\gamma^{-1}(i)$ は 2 個以上の要素からなり、$U_j^{k+1} \subset U_{\gamma(j)}^k$ である。そこで、$\varphi_k\colon \{0, 1, \dots, n_k\} \to \{0, 1, \dots, n_{k+1}\}$ を $\varphi_k(0) = 0$ および $\varphi_k(i) = \max \gamma^{-1}(i)$ $(i \geqq 1)$ で定めれば、(ii)(iii)(iv) の条件はすべて成り立つ。 □

定理 B の証明では、実質的にはより強く次のことが示されている。

定理 B′. X を Hausdorff 空間、$a, b \in X$ とする。このとき、連続写像 $f\colon I \to X$ で $f(0) = a, f(1) = b$ となるものが存在するならば、単射な連続写像 $g\colon I \to X$ で $g(0) = a$, $g(1) = b$ となるものが存在する。 □

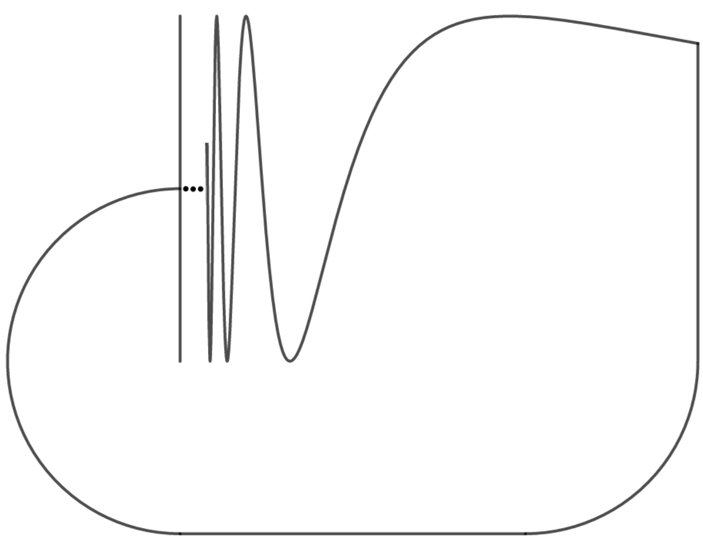
余談：ワルシャワの円

命題 1.3 の応用として、「ワルシャワの円」という空間はすべてのホモトピー群が自明であるが可縮ではない、ということを示そう。

$I_0 = \{0\} \times [-1, 1]$ とおくとき、$\mathbb{R}^2$ のコンパクト部分集合

$$W' = I_0 \cup \{(x, \sin(1/x) \,|\, 0 < x \leqq 1\}$$

において、二点 $(0, 0)$, $(1, \sin 1)$ を同一視して得られる空間 W を**ワルシャワの円 (Warsaw circle)** という。W は平面に位相的に埋め込むことができる。



ワルシャワの円 W

S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の単位球面とする。$\pi\colon W' \to W$ を商写像とし、連続写像 $q\colon W \to S^1$, $e\colon \mathbb{R} \to S^1$, をそれぞれ $q(\pi(x, y)) = (\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$, $e(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める。さらに、以下の記法を用いる。ワルシャワの円の定義に用いた $W' \subset \mathbb{R}^2$ と実数 $a < b$ に対して

$$W'[a, b] = W' \cap ([a, b] \times \mathbb{R}) = \{(x, y) \in W' \,|\, a \leqq x \leqq b\}$$

とする。$W'(a, b)$, $W'(a, b]$ なども同様に定義する。まず、W と W' の基本的な性質を調べておこう。

命題 4.5. W および W' について、以下の (i)-(v) が成り立つ。

(i) W' は連結である。

(ii) W' は I_0 の各点で局所連結でない。

(iii) W' は弧状連結でない。

(iv) W は弧状連結である。

(v) W は $\pi(I_0)$ の各点で局所連結でない。

証明. (i) W' は連結部分集合 $W'(0,1]$ の閉包なので、連結である。

(ii) $t_0 \in [-1,1]$ とする。$(0,t_0)$ において W が局所連結でないことを示そう。ε という実数を次で定義する。$t_0 = -1$ のときは $\varepsilon = 1$ とし、$t_0 \neq 1$ のときは $\varepsilon = -1$ とする。このとき、$U = W' \setminus (\mathbb{R} \times \{\varepsilon\})$ は $(0,t_0)$ の W における開近傍である。このとき、$(0,t_0) \in V \subset U$ を満たす W' の任意の開集合 V に対して、V は U の無限個の（とくに 2 個以上の）連結成分と交わる。したがって、V は連結ではありえない。これは W' が $(0,t_0)$ において局所連結でないことを意味する。

(iii) W' が弧状連結であれば、連続全射 $f\colon I \to W'$ をつくることができる。よって、命題 1.3 により、W' は局所連結となり (ii) に反する。

(iv) I_0, $W'(0,1]$ はそれぞれ弧状連結なので、$\pi(I_0)$, $\pi(W'(0,1]) \subset W$ は弧状連結である。よって、$W = \pi(I_0) \cup \pi(W'(0,1])$, $\pi(0,0) \in \pi(I_0) \cap \pi(W'(0,1])$ により W は弧状連結である。

(v) もし W が局所連結であれば、直ちに確かめられるように $W \setminus \pi(W'(1/3,2/3))$ も局所連結である。連続な全射 $r\colon W \setminus \pi(W'(1/3,2/3)) \to \pi(W'[0,1/3])$ を、$r|_{\pi(W'[0,1/3])} = \mathrm{id}$ および $r(\pi(W'[2/3,1])) = \{\pi(0,0)\}$ により定義でき、r は閉写像だから、命題 1.3 により $\pi(W'[0,1/3])$ は局所連結である。さらに、同相写像 $\pi(W'[0,1/3]) \approx W'[0,1/3] \approx W'$ があるので、W' も局所連結となり、(ii) に反する。 □

命題 4.6. ワルシャワの円 W のすべてのホモトピー群は自明である。言い換えると、各 $n \geqq 0$ に対して、任意の連続写像 $f\colon S^n \to W$ は W において定値写像にホモトピックである。

証明. $n = 0$ の場合は、W の弧状連結性により $f\colon S^0 \to W$ は定値写像にホモトピックである。$n \geqq 1$ のとき、命題 1.3 により、$C = f(S^n) \subset W$ および $q(C) \subset S^1$ は局所連結な連続体である。

主張. $0 < \delta < 1$ を満たすある δ に対して、$e((0,\delta)) \cap q(C) = \emptyset$ となる。

主張の証明. そうでないとすると、列 $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots \to 0$ であって、$e(\varepsilon_n) \in q(C)$ となるものが存在する。このとき、$e([\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i]) \not\subset q(C)$ となるような $i \geqq 1$ が 2 個以上存在すれば、$q(C)$ の連結性に反する。よって、とくに、$i_0 \geqq 1$ が存在して、$i \geqq i_0$ のとき常に $e([\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i]) \subset q(C)$ となる。すなわち、$\varepsilon_0 = \varepsilon_{i_0}$ とおくとき $e((0,\varepsilon_0]) \subset q(C)$ である。よって、$\pi(W'(0,\varepsilon_0]) \subset C$ である。ところが C はコンパクトであるから、

$\pi(W'[0,\varepsilon_0]) = \pi(\mathrm{Cl}\,W'(0,\varepsilon_0]) \subset C$ である。$C' = \pi(W'[0,\varepsilon_0])$ とおくと、π は $W'[0,\varepsilon_0]$ から C' への同相写像を与える。C は局所連結であって、C' は点 $\pi(0,1)$ の C における（閉）近傍であるから、C' は点 $\pi(0,1)$ において局所連結であり、よって、$W'[0,\varepsilon_0]$ は点 $(0,1)$ において局所連結である。しかし、$W'[0,\varepsilon_0]$ は点 $(0,1)$ の W' における近傍であるから、W' は点 $(0,1)$ において局所連結となり、命題 4.5(ii) に反する。 □

主張のような δ をとるとき、$T = \pi(I_0 \cup W'[\delta,1])$ とおけば、$f(S^n) = C \subset T$ である。しかし、T は 2 個の単位閉区間を 1 点で貼り合わせた形の（T 字形の）空間と同相だから可縮である。よって、$f\colon S^n \to W$ は W において定値写像にホモトピックである。 □

これで、ワルシャワの円 W のすべてのホモトピー群は自明であることが分かった。それにもかかわらず、W は可縮ではない[*7]。このことの証明を以下で述べよう[*8]。

まず、被覆空間についての事実を一つ引用する。被覆空間 $p\colon E \to B$ と連続写像 $f\colon X \to B$ に対して、f の**リフト (lift)** とは、$\tilde{f} \circ p = f$ を満たす連続写像 $\tilde{f}\colon X \to E$ のことをいう。

定理 4.7. $p\colon E \to B$ を被覆空間、X を位相空間、$H\colon X \times I \to B$ をホモトピーとし、さらに、連続写像 $\tilde{h}\colon X \times \{0\} \to E$ が $H|_{X\times\{0\}}$ のリフトであるとする。このとき、H のリフトであり、かつ $\tilde{h}$ の拡張であるようなホモトピー $\tilde{H}\colon X \times I \to E$ が存在する。

これは、代数的トポロジーでは「$p\colon E \to B$ は任意の位相空間 X に対して被覆ホモトピー性質をもつ」あるいは「p は Hurewicz の意味でのファイブレーションである」などと表現される性質である。定理 4.7 の証明は、多くの代数的トポロジーの教科書に書かれているが、例えば Hatcher の本 [2, Proof of Theorem 1.7] で読むことができる。この定理から、直ちに次を得る。

系 4.8. $p\colon E \to B$ を被覆空間、X を位相空間とし、連続写像 $f\colon X \to B$ がある定値写像にホモトピックであるとする。このとき、f のリフト $\tilde{f}\colon X \to E$ が存在する。

証明. $H\colon X \times I \to B$ を、定値写像から f へのホモトピーとする。すなわち、$H|_{X\times\{0\}}$ は定値写像で、$H(x,1) = f(x)$ $(x \in X)$ であるとする。すると、$H|_{X\times\{0\}}$ は明らかにリ

---

*7 J. H. C. Whitehead の定理により、弧状連結な CW 複体（あるいは CW 複体のホモトピー型をもつ空間）X のすべてのホモトピー群が自明ならば、X は可縮である。よって、とくにワルシャワの円 W は CW 複体のホモトピー型をもたないことが分かる。

*8 この議論は次のウェブサイトによる：`https://math.stackexchange.com/questions/1004837/how-to-show-warsaw-circle-is-non-contractible`（2019 年 7 月 30 日閲覧）

フト $\tilde{h}\colon X \times \{0\} \to E$ をもつから、定理 4.7 により、H のリフト $\tilde{H}\colon X \times I \to E$ が存在する。このとき、$\tilde{f}(x) = \tilde{H}(x, 1)$ $(x \in X)$ は f のリフト $\tilde{f}\colon X \to E$ を定義する。 $\square$

さて、$e(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ で定義される連続写像 $e\colon \mathbb{R} \to S^1$ は被覆空間となるのであった。連続写像 $q\colon W \to S^1$ を、$q(\pi(x, y)) = e(x)$ により定めよう。もし、W が可縮であれば、q は定値写像にホモトピックとなるので、系 4.8 により、q のリフト $\tilde{q}\colon W \to \mathbb{R}$ が存在する。いま、$q(\pi(I_0)) = \{(1, 0)\} \subset S^1$ なので、

$$\tilde{q}(\pi(I_0)) \subset e^{-1}(1, 0) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

であるが、$\pi(I_0)$ は連結で $\mathbb{Z}$ は離散空間であるから、$\tilde{q}|_{\pi(I_0)}$ は定値写像でなければならない。ところで、q のファイバーで一点集合ではないものは $\pi(I_0)$ のみであるから、q は商写像であることに注意すれば連続写像 $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$ で $h \circ q = \tilde{q}$ となるものが存在する。すると

$$e \circ h \circ q = e \circ \tilde{q} = q$$

であるから、q の全射性により $e \circ h = \mathrm{id}$ で、よって $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$ は単射である。ところが、中間値の定理により、S^1 から $\mathbb{R}$ への連続な単射は存在しないから矛盾する。これで、ワルシャワの円 W は可縮でないことが証明された。

参考文献

[1] H. Hahn, *Mengentheoretische characterisierung der stetigen kurven*, Sitzungsberichte, Akad. der Wissenschaften **123** (1914), p. 2433-2489.

[2] A. Hatcher, Algebraic topology, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[3] S. Mazurkiewicz, *Sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. **1** (1920), 166-209.