Tychonoff の定理の証明

—原論文の方法に基づいて—

yamyamtopo

本稿では、集合 E の濃度を $|E|$ で表す。これは E との間に全単射が存在する最小の順序数として定義される。ここで順序数は von Neumann 流の定義による。つまり、順序数はそれより小さい順序数全体の集合に等しい。以下では Tychonoff の原論文 [1] にほぼ基づく方法で、Tychonoff の定理の証明を与える[*1]。

1　完全集積点

位相空間 X の無限部分集合 E に対して点 $p \in X$ が E の**完全集積点 (complete accumulation point)** であるとは、p の任意の近傍 U に対して $|E \cap U| = |E|$ が成り立つことをいう。

命題 1.1. 位相空間 X がコンパクトであるためには、X の任意の無限部分集合が完全集積点をもつことが必要十分である。

証明. まず、必要性を示す。X がコンパクトであるとし、$E \subset X$ を無限集合とする。もし、E が完全集積点をもたないならば、各 $x \in X$ に対してその開近傍 U_x を選んで、$|E \cap U_x| < |E|$ であるようにできる。X はコンパクトであるから、有限個の $x_1, \ldots, x_n \in X$ を取り $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ とできる。このとき

$$|E| \leqq \sum_{i=1}^{n} |E \cap U_{x_i}| < |E|$$

となり矛盾を生ずる（ここで、最後の不等号は $|E \cap U_{x_i}|$ がすべて有限な場合とそうでな

*1 Tychonoff の原論文の方法による Tychonoff の定理の証明は 1994 年の Wright の論文 [3] で紹介されているが、詳しく述べられているのは 2 個の空間の積の場合のみで、一般の場合は非常に簡略にしか書かれていない。本稿はこの部分を詳しく書き下したものと言える。

い場合に分けて考えれば分かる)。

次に、十分性を示す。そのため X がコンパクトでないと仮定しよう。このとき X の無限部分集合で完全集積点をもたないものの存在を示せばよい。仮定から、X の開被覆 $\mathcal{U}$ で有限部分被覆をもたないものが存在する。そのような $\mathcal{U}$ で濃度が最小のものを選ぶことにして、$|\mathcal{U}| = \kappa\,(\geqq \aleph_0)$ とする。すると、$\mathcal{U} = \{U_\alpha \,|\, \alpha < \kappa\}$ と表すことができる。$A_\alpha = U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ として、$S = \{\alpha < \kappa \,|\, A_\alpha \neq \emptyset\}$ とおく。$X = \bigcup_{\alpha \in S} U_\alpha$ となるから $|\mathcal{U}|$ の最小性と $S \subset \kappa$ により $\kappa = |\mathcal{U}| \leqq |S| \leqq \kappa$ であり、よって $|S| = \kappa$ である。そこで、各 $\alpha \in S$ に対して $x_\alpha \in A_\alpha$ を選び、$E = \{x_\alpha \,|\, \alpha \in S\}$ とおく。すると $|E| = |S| = \kappa$ である。また任意の点 $x \in X$ を与えるとき、$x \in U_\alpha$ となるように $\alpha \in S$ をとれば $E \cap U_\alpha \subset \{x_\beta \,|\, \beta \in S, \beta \leqq \alpha\}$ により $|E \cap U_\alpha| \leqq |\alpha + 1| \leqq \alpha + 1 < \kappa = |E|$ である。よって、E は完全集積点をもたない。 □

2 Tychonoff の定理の証明

定理 2.1. コンパクト空間からなる任意の族 $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ はコンパクトである。

証明. $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とする。$\Lambda = \emptyset$ のときは X は一点集合であるから主張は明らかである。そこで、以下では $\Lambda \neq \emptyset$ であるとし、整列可能定理を用いて、添字集合 Λ に整列順序 $\leqq$ を与えておく。Λ の $\leqq$ に関する最小元を $\lambda_{\min}$ とする。さらに、必要なら整列順序を取り換えて、Λ は最大元 $\lambda_{\max}$ をもつとしてよい。

命題 1.1 を用いて、X がコンパクトであることを示そう。そこで $E \subset X$ を無限集合とする。$x_\lambda \in X_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ であって、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して次の性質 $(\star)_\lambda$ をもつものを、超限帰納的に構成する。

$(\star)_\lambda$: $(x_\mu)_{\mu\leqq\lambda}$ の $\prod_{\mu\leqq\lambda} X_\mu$ における任意の近傍 U に対して、

$$\left| E \cap \left(U \times \prod_{\mu>\lambda} X_\mu \right) \right| = |E|$$

が成り立つ。

まず最初のステップとして $x_{\lambda_{\min}}$ を構成する。$(\star)_{\lambda_{\min}}$ を満たすように $x_{\lambda_{\min}}$ を取れないとすれば、各 $y \in X_{\lambda_{\min}}$ に対して、その開近傍 $U_y \subset X_{\lambda_{\min}}$ を選び、$|E \cap (U_y \times \prod_{\mu>\lambda_{\min}} X_\mu)| < |E|$ となるようにできる。$X_{\lambda_{\min}}$ はコンパクトだから、$y_1, \ldots, y_n \in$

$X_{\lambda_{\min}}$ を取り $X_{\lambda_{\min}} = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ とできる。このとき

$$\begin{aligned} |E| &= \left| E \cap (\textstyle\bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \times \prod_{\mu > \lambda_{\min}} X_\mu) \right| \\ &\leqq \sum_{i=1}^n \left| E \cap (U_{y_i} \times \textstyle\prod_{\mu > \lambda_{\min}} X_\mu) \right| \\ &< |E| \end{aligned}$$

となるから矛盾する（命題 1.1 での必要性の証明と同様の議論）。これで $(\star)_{\lambda_{\min}}$ を満たすように $x_{\lambda_{\min}}$ を取れることが分かった。

次に $\lambda > \lambda_{\min}$ であるとし、各 $\mu < \lambda$ に対しては $x_\mu \in X_\mu$ が定まり、$(\star)_\mu$ $(\mu < \lambda)$ を満たすようにできたとする。いま、$x_\lambda \in X_\lambda$ を $(\star)_\lambda$ を満たすように取れなかったとすれば、各 $y \in X_\lambda$ に対して、その開近傍 $U_y \subset X_\lambda$ と $(x_\mu)_{\mu<\lambda}$ の $\prod_{\mu<\lambda} X_\mu$ における開近傍 V_y を選び、

$$\left| E \cap \left(V_y \times U_y \times \textstyle\prod_{\mu > \lambda} X_\mu \right) \right| < |E| \tag{$\sharp$}$$

が成り立つようにできる。X_λ はコンパクトなので、$y_1, \ldots, y_n \in X_\lambda$ を取り $X_\lambda = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$ とできる。このとき、次が成り立つ。

主張 1. ある $\mu_0 < \lambda$ と、$(x_\mu)_{\mu \leqq \mu_0}$ の $\prod_{\mu \leqq \mu_0} X_\mu$ における近傍 V が存在して、

$$V \times \textstyle\prod_{\mu_0 < \mu < \lambda} X_\mu \subset \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$$

となる[*2]。

主張 1 の証明. $\bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ は $(x_\mu)_{\mu<\lambda}$ の $\prod_{\mu<\lambda} X_\mu$ における近傍であることに注意する。$p_\mu \colon \prod_{\mu<\lambda} X_\mu \to X_\mu$ を射影とするとき、直積位相の定義から、有限個の $\mu_1, \ldots, \mu_m < \lambda$ と x_{μ_j} の X_{μ_j} における近傍 W_j が存在して、$\bigcap_{j=1}^m p_{\mu_j}^{-1}(W_j) \subset \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ が成り立つ[*3]。いま $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ とし、$q_j \colon \prod_{\mu \leqq \mu_0} X_\mu \to X_{\mu_j}$ $(j = 1, \ldots, m)$ を射影とすると、$V = \bigcap_{j=1}^m q_j^{-1}(W_j)$ は $(x_\mu)_{\mu \leqq \mu_0}$ の $\prod_{\mu \leqq \mu_0} X_\mu$ における近傍であって、$V \times \prod_{\mu_0 < \mu < \lambda} X_\mu = \bigcap_{j=1}^m p_{\mu_j}^{-1}(W_j) \subset \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ である。 □

---

*2 もし λ に直前の元 λ' がある場合は、$\mu_0 = \lambda'$, $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ とすることで主張は直ちに言えるので、本質的なのは λ に直前の元がない場合（つまり極限順序数に相当するステップ）である。

*3 直積位相を単に「$\prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$（$V_\lambda$ は X_λ の開集合）で生成される位相」とした場合（このような位相を**箱位相**という）、証明が唯一行き詰まるポイントがここである。なお、Λ の $\lambda_{\min}$ 以外の元がすべて直前の元をもつ場合、つまり Λ が有限の場合（最大元 $\lambda_{\max}$ の存在に注意せよ）、脚注*2 により主張 1 は自明となるので、箱位相でも証明はすべてうまくいく。有限積の場合には箱位相が直積位相に一致するから、これは辻褄が合っている。

主張 1 と ($\sharp$) により、

$$\begin{aligned}\left|E\cap\left(V\times\prod_{\mu>\mu_0}X_\mu\right)\right| &= \left|E\cap\left(V\times\prod_{\mu_0<\mu<\lambda}X_\mu\times\prod_{\mu\geqq\lambda}X_\mu\right)\right| \\ &\leqq \left|E\cap\left(\bigcap_{i=1}^n V_{y_i}\times\prod_{\mu\geqq\lambda}X_\mu\right)\right| \\ &= \left|E\cap\left(\bigcap_{i=1}^n V_{y_i}\times\bigcup_{i=1}^n U_{y_i}\times\prod_{\mu>\lambda}X_\mu\right)\right| \\ &\leqq \sum_{i=1}^n\left|E\cap\left(V_{y_i}\times U_{y_i}\times\prod_{\mu>\lambda}X_\mu\right)\right| \\ &< |E|\end{aligned}$$

となる。これは、$(\star)_{\mu_0}$ が成り立つことに反する。これで $(\star)_\lambda$ を満たすように $x_\lambda\in X_\lambda$ が取れることが分かった。

以上で超限帰納的な構成が完了した。$x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in X$ と定義しよう。x の $X=\prod_{\lambda\leqq\lambda_{\max}}X_\lambda$ における近傍 U を任意に与えると、$(\star)_{\lambda_{\max}}$ により、$|E\cap U|=|E|$ である。これで x が E の完全集積点であることが示され、証明が終わった。 □

3 Tychonoff の原論文についての注意

Tychonoff が 1930 年に発表した原論文 [1] の議論はここで紹介したものと若干違った点があるので注意しておく。

まず、Tychonoff はこの論文で任意のコンパクト空間について定理を証明した訳ではない。Tychonoff が証明したのは因子の空間がすべて単位閉区間である特別な場合である。しかし、その議論は明らかに任意のコンパクト空間に適用できる。また任意個の空間の直積の概念はそのときは存在しなかったため、Tychonoff はその位相を具体的に各点の近傍系を定めることで定義している。一般的な形で Tychonoff の定理が定式化され証明されたのは、1935 年の Tychonoff の論文 [2] においてである。

本稿の超限帰納法による議論は大筋で原論文 [1] に沿っているが、細かい点では違いがある。Tychonoff は証明の前に、完全集積点の概念の次のような拡張を導入している。E を無限集合、X を位相空間とするとき、$x\in X$ が写像 $f\colon E\to X$ に関する E の**集中点 (Konzentrationspunkt)** であることを、x の任意の近傍 U に対して $|E|=|f^{-1}(U)|$ が成り立つことと定義し、f に関する E の集中点の全体を $[E]_f$ と書く。$[E]_f$ は X の閉集合である。また、X がコンパクトならば $[E]_f$ は空でないことが、定理 1.1 の証明の必要性の部分と同様に分かる。

この定義によれば、定理 2.1 の証明での $x_{\lambda_{\min}}$ の取り方は、$p_{\lambda_{\min}}$ に関する E の集中点、つまり $[E]_{p_{\lambda_{\min}}}$ の点を取ったと記述できる。ここで $p_\lambda\colon X \to X_\lambda$ は射影である。また、$x_\mu\,(\mu < \lambda)$ が選ばれたとしたときに x_λ を取るステップはおよそ次のように記述される。まず、$(x_\mu)_{\mu<\lambda}$ の $\prod_{\mu<\lambda} X_\mu$ における開近傍の全体を $\mathcal{V}$ とし、各 $V \in \mathcal{V}$ に対して $E_V = E \cap (V \times \prod_{\mu \geqq \lambda} X_\mu)$ とする。このとき帰納法の仮定から $|E_V| = |E|$ であって、X_λ の部分集合族 $\{[E_V]_{p_\lambda} \mid V \in \mathcal{V}\}$ が有限交叉的であることが、

$$[E_{V_1}]_{p_\lambda} \cap \cdots \cap [E_{V_k}]_{p_\lambda} \supset [E_{V_1 \cap \cdots \cap V_k}]_{p_\lambda} \neq \emptyset$$

により分かる。よって、X_λ のコンパクト性により、$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} [E_V]_{p_\lambda}$ は空でなく、その点の一つを x_λ とすればよい。

そもそも Tychonoff の論文 [1] の主目的は、今日でいう Tychonoff の定理（の特殊ケース）を示すことにあったのではない。むしろ中心的なのは一般の位相空間をコンパクトな空間に埋め込む問題であった。その埋め込み先の空間として、Tychonoff は今日でいう単位閉区間の直積空間を考え、それがコンパクトであることを示したのである。そして、正則と正規の間に位置する「完全正則空間」のクラスを導入し、コンパクト（Hausdorff）空間に埋め込まれる位相空間の全体が完全正則空間のクラスに一致することを示した。完全正則空間は今日は Tychonoff 空間の名でも知られている。また、この論文では正則だが完全正則でない空間の例や、完全正則だが正規でない空間の例も与えられており、今日それらの反例はそれぞれ Tychonoff corkscrew, Tychonoff plank の名で知られている。

参考文献

[1] A. Tychonoff, *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. **102** (1930), no. 1, 544–561.

[2] A. Tychonoff, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. **111** (1935), no. 1, 767–776.

[3] David G. Wright, *Tychonoff's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), no. 3, 985–987.