Hilbert 立方体の等質性

yamyamtopo

概要

有限次元の立方体 $I^n = [0,1]^n$ においては、内部 $(0,1)^n$ の点と境界 $\partial I^n = I^n \setminus (0,1)^n$ の点は、I^n の自己同相写像により移り合うことができない。これに対して、「無限次元の立方体」である Hilbert 立方体 $Q = I^{\mathbb{N}}$ は等質である。すなわち、任意の $x, y \in Q$ に対して $h(x) = y$ を満たす Q の自己同相写像 h が存在し、この意味で境界と内部の位相的区別が存在しない。本稿では、この Q の等質性を証明する。

0　はじめに

位相空間において「どの点も位相的に同等である」ということを表す性質として等質性がある。位相空間 X が**等質 (homogeneous)** であるとは、任意の $x, y \in X$ に対して、同相写像 $h\colon X \to X$ であって $h(x) = y$ となるものが存在することをいう。たとえば、Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ においては、このような同相写像 h として平行移動が取れるので、$\mathbb{R}^n$ は等質な空間である。同様にして、任意の位相群は等質な空間である。

$I = [0,1]$ を単位閉区間とする。I は等質な空間ではない。実際、$x = 1/2$, $y = 0$ という I の点を考えれば、$I \setminus \{x\}$ がは二個の連結成分に分かれるのにに対して $I \setminus \{y\}$ は連結である。もし、同相写像 $h\colon I \to I$ で $h(x) = y$ となるものが存在すれば、h の制限は非連結空間 $I \setminus \{x\}$ から連結空間 $I \setminus \{y\}$ への同相写像を与え、矛盾する。一般に I の内部 $(0,1)$ の点を I の境界 $\{0,1\}$ の点に、I の自己同相写像によってうつすことはできない。

より一般に、n を正の整数として、n 次元立方体 $I^n = [0,1]^n$ を考える。$(0,1)^n$ を I^n の内部と呼び、$\partial I^n = I^n \setminus (0,1)^n$ を I^n の境界と呼ぶ。x が I^n の内部の点、y が I^n の境界の点であるとき、I^n の自己同相写像によって x を y にうつすことはできない[*1]。したがって、I^n は等質な空間ではない。

[*1] このことは直観的にもっともらしいが、$I^n \setminus \{x\}$ が $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} にホモトピー同値であること、$I^n \setminus \{y\}$ が一点からなる空間 $*$ にホモトピー同値であること、および S^{n-1} と $*$ の $(n-1)$ 次整係数ホモロジー群が同型でないことから示すことができる。

Hilbert 立方体 Q は、「無限次元の立方体」である。これは閉区間 I の可算無限個の直積空間として $Q = I^{\mathbb{N}}$ と定義される。ここでも、Q の「内部」を $(0,1)^{\mathbb{N}}$ と定義し、「境界」を $Q \setminus (0,1)^{\mathbb{N}}$ と定義することはできるが、これはもはや有限次元の場合から期待されるような性質をもたない。つまり、Q の「内部」の点を「境界」の点にうつすような Q の自己同相写像が存在してしまう[*2]。実際、これから見ていくように、Q は等質な位相空間であることが証明できるのである。

本稿では、$\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする。

1 Hilbert 立方体の定義と基本性質

Hilbert 立方体 (Hilbert cube) Q とは、単位閉区間 $I = [0,1]$ の可算無限個の直積空間として

$$Q = I^{\mathbb{N}} = I \times I \times I \times \cdots$$

と定義される位相空間である[*3]。Q の点は、$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, (x_i), あるいは $(x_1, x_2, \ldots)$ と表される。ここで、x_i は $0 \leqq x_i \leqq 1$ を満たす実数である。各 $i \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathrm{pr}_i \colon Q \to I$ を第 i 座標への射影とする。

直積位相の定義により、n を正の整数、$U_i\,(i = 1, \ldots, n)$ を I の開集合とするときに

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{pr}_i^{-1}(U_i) = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times I \times I \times \cdots$$

の形で表される Q の部分集合全体が、Q の開基をなす。

Tychonoff の定理により、Q はコンパクトな空間である。さらに、Q は距離化可能な空間である。実際、次が成り立つ。

命題 1.1. Hilbert 立方体 Q の位相は、$x = (x_i)$, $y = (y_i) \in Q$ に対して

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |x_i - y_i|$$

として定義される距離 d によって生成される。

[*2] このように定義された Q の「内部」や「境界」は他にも有限次元の場合と異なる性質をもつ。たとえば、「内部」は Q の開集合ではなく、よって「境界」は Q の閉集合ではない。また、「境界」は Q において稠密である。

[*3] Hilbert 立方体を Q と表す記法は、cube の下線部の発音が Q と共通していることに由来していると、筆者は思っている。

証明. 上で定義された d が集合 Q 上の距離となることは容易に確かめられる。（直積位相をもつ）Hilbert 立方体 Q から距離空間 (Q,d) への恒等写像 $f\colon Q \to (Q,d)$ が同相写像であることを示せばよい。Q はコンパクトで (Q,d) は Hausdorff 空間であるから、f が連続であることを示せば十分である。

$x=(x_i)\in Q$ を固定し、x において f が連続であることを示そう。$\varepsilon>0$ を任意に与える。$N\in\mathbb{N}$ を十分大きく取れば、$\sum_{i=N+1}^{\infty}2^{-i}<\varepsilon/2$ である。そして I の開集合 $U_i\,(i=1,\dots,N)$ を

$$U_i=\{t\in I\,|\,|t-x_i|<\varepsilon/2N\}$$

で定義する。すると、$U=\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{pr}_i^{-1}(U_i)$ は x の Q における開近傍であって、任意の $y=(y_i)\in U$ に対して

$$\begin{aligned} d(y,x)&=\sum_{i=1}^{N}2^{-i}|y_i-x_i|+\sum_{i=N+1}^{\infty}2^{-i}|y_i-x_i|\\ &\leqq\sum_{i=1}^{N}|y_i-x_i|+\sum_{i=N+1}^{\infty}2^{-i}\\ &<N\cdot(\varepsilon/2N)+\varepsilon/2=\varepsilon \end{aligned}$$

となる。よって、$f\colon Q\to(Q,d)$ は x において連続である。 □

かくして、Q はコンパクトな距離化可能空間であると分かった。

2　コンパクト距離空間の自己同相写像の空間

Hilbert 立方体 Q の等質性を示すためには、Q の自己同相写像全体のなす空間を考えるのがよい。そこで、一般にコンパクト距離空間の自己同相写像の空間の性質を調べる。

$X=(X,d)$ をコンパクト距離空間とする。まず、$C(X,X)$ を X から X 自身への連続写像全体の集合とする。$f,g\in C(X,X)$ に対して

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in X}d(f(x),g(x))$$

とおこう。

命題 2.1. コンパクト距離空間 (X,d) に対して、次が成り立つ。

(1) ρ は $C(X,X)$ 上の完備な距離である。
(2) $C(X,X)$ に ρ から定まる位相を導入するとき、写像の合成 $C(X,X)\times C(X,X)\to C(X,X),\ (f,g)\mapsto f\circ g$ は連続写像となる。

証明. (1) 概要のみ述べる。まず、ρ が距離となることは簡単に確かめられる。ρ の完備性を示すため、$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $C(X,X)$ 内の ρ に関する Cauchy 列としよう。このとき、各 $x \in X$ に対して、

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leqq \rho(f_n, f_m) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

が成り立つことから、$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ は d に関して X 内の Cauchy 列となる。ところが、X はコンパクトだから d は完備である。よって、各 $x \in X$ に対して $f(x) \in X$ が定まり $n \to \infty$ のとき $d(f_n(x), f(x)) \to 0$ となる。こうして定まる $f\colon X \to X$ が連続であること、つまり $f \in C(X,X)$ であることが示され、さらに $n \to \infty$ のとき $\rho(f_n, f) \to 0$ であることが示される。

(2) $f_0, g_0 \in C(X,X)$ とし、写像の合成 $C(X,X) \times C(X,X) \to C(X,X)$ が点 (f_0, g_0) において連続であることを示そう。そこで、$\varepsilon > 0$ とする。(X,d) はコンパクト距離空間だから、$f_0\colon X \to X$ は d について一様連続である。よって、$\delta > 0$ が存在して、$x, x' \in X$ が $d(x,x') < \delta$ を満たすとき常に $d(f_0(x), f_0(x')) < \varepsilon/3$ となる。そこで、$f, g \in C(X,X)$ で $\rho(f, f_0) < \varepsilon/3$, $\rho(g, g_0) < \delta$ を満たすものを任意に与えよう。すると、任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned} d(f\circ g(x), f_0\circ g_0(x)) &\leqq d(f\circ g(x), f_0\circ g(x)) + d(f_0\circ g(x), f_0\circ g_0(x)) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3 \end{aligned}$$

となる。よって、$\rho(f\circ g, f_0\circ g_0) \leqq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ である。 □

$H(X)$ を X の自己同相写像の全体、つまり X から X 自身への同相写像全体のなす $C(X,X)$ の部分集合とする。ρ を $H(X)$ に制限したものを再び ρ で表し、$H(X)$ をこの距離 ρ によって位相空間とみなす。ρ は $H(X)$ 上の距離としては必ずしも完備でないことに注意しよう。

例 2.2. $X = I = [0,1]$ とし、$h_n \in H(I)\,(n \in \mathbb{N})$ を

$$h_n(x) = \begin{cases} x/n & 0 \leqq x \leqq 1/2 \text{ のとき} \\ (2-1/n)x - 1 + 1/n & 1/2 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

により定義する（つまり、$(0,0)$, $(1/2, 1/2n)$, $(1,1)$ を順に結んでできる折れ線をグラフとする関数を h_n とする）。すると、$i, j \geqq n$ のとき $\rho(h_i, h_j) < 1/n$ となるので、$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は ρ に関して Cauchy 列である。もし、ある $h \in H(I)$ に対して $n \to \infty$ のとき $\rho(h_n, h) \to 0$ であったとすると、任意の $x \in I$ に対して $h_n(x) \to h(x)$ であるから、

$$h(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqq x \leqq 1/2 \text{ のとき} \\ 2x - 1 & 1/2 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

である。この h は単射ではないから $h \notin H(X)$ となり、矛盾する。よって、Cauchy 列 (h_n) は $H(X)$ において収束しないから、ρ は $H(X)$ 上の完備距離ではない。

$H(X)$ は、写像の合成について群の構造をもっているが、これについて次が成り立つ。

命題 2.3. コンパクト距離空間 (X, d) に対して、$H(X)$ は位相群となる。

証明. まず、積 $H(X) \times H(X) \to H(X)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ の連続性については、命題 2.1(2) から直ちに分かる。次に、逆元をとる写像 $\iota\colon H(X) \to H(X)$, $f \mapsto f^{-1}$ の連続性を示そう。一般に $f \in H(X)$ に対して、

$$\rho(f^{-1}, \mathrm{id}) = \sup_{x \in X} d(f^{-1}(x), x) = \sup_{x \in X} d(f^{-1}(f(x)), f(x)) = \sup_{x \in X} d(x, f(x)) = \rho(\mathrm{id}, f)$$

であるから、ι は単位元 $\mathrm{id} \in H(X)$ において連続である。次に、任意に $f_0 \in H(X)$ を与える。ι は合成

$$H(X) \xrightarrow{-\circ f_0^{-1}} H(X) \xrightarrow{\iota} H(X) \xrightarrow{f_0^{-1} \circ -} H(X)$$

に等しいことに注意しよう。すでに見た積の連続性から、ここでの $- \circ f_0^{-1}$ と $f_0^{-1} \circ -$ は連続である。とくに $- \circ f_0^{-1}$ は f_0 において連続であり、$f_0^{-1} \circ -$ は id において連続である。よって、ι は f_0 において連続である。 □

$H(X)$ 上の距離 ρ は必ずしも完備ではないのであった。その欠点を補うため、$H(X)$ 上の新しい距離 ρ_0 を

$$\rho_0(f, g) = \rho(f, g) + \rho(f^{-1}, g^{-1}) \quad (f, g \in H(X))$$

で定義する。

命題 2.4. コンパクト距離空間 (X, d) に対して、上の距離 ρ_0 は $H(X)$ 上の位相と合致する。すなわち、ρ_0 は ρ と同じ位相を定める。さらに、距離 ρ_0 は完備である。

証明. まず、ρ_0 が ρ と同じ位相を定めることを示す。それには、$H(X)$ の点列 $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ と $h \in H(X)$ に対して、$n \to \infty$ のとき

$$\rho_0(h_n, h) \to 0 \iff \rho(h_n, h) \to 0 \tag{$\star$}$$

であることを示せばよい。$\rho \leqq \rho_0$ であるから、$\Longrightarrow$ が成り立つ。一方、命題 2.3 により、写像 $H(X) \to H(X)$, $f \mapsto f^{-1}$ は連続であるから、$\rho(h_n, h) \to 0$ のとき $\rho(h_n^{-1}, h^{-1}) \to 0$ も成り立ち、よって $\rho_0(h_n, h) = \rho(h_n, h) + \rho(h_n^{-1}, h^{-1}) \to 0$ である。したがって、$\Longleftarrow$ が成り立つ。

次に、ρ_0 の完備性を示すため、$(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $H(X)$ における ρ_0 に関する Cauchy 列とする。すると、(h_n) および (h_n^{-1}) は ρ に関する Cauchy 列である。ρ は $C(X,X)$ 上の距離としては完備であったから、$h,k\in C(X,X)$ が存在して $n\to\infty$ のとき $\rho(h_n,h)\to 0$, $\rho(h_n^{-1},k)\to 0$ である。よって、命題 2.1(2) により、

$$\rho(\mathrm{id},h\circ k)=\rho(h_n\circ h_n^{-1},h\circ k)\to 0$$

であるから、$h\circ k=\mathrm{id}$ である。同様に、$k\circ h=\mathrm{id}$ である。よって、h は k を逆にもつ同相写像だから、$h\in H(X)$ である。したがって、同値性 $(\star)$ を適用することができ、$\rho_0(h_n,h)\to 0$ となることが分かる。よって、ρ_0 は $H(X)$ 上の完備な距離である。 □

かくして、次のことが分かった。

系 2.5. コンパクト距離空間 X に対して $H(X)$ は完備距離化可能な空間である。 □

3 Hilbert 立方体の等質性

Hilbert 立方体 $Q=[0,1]^{\mathbb{N}}$ の話に戻る。Q の「面」にあたる部分集合

$$F_{i0}=\mathrm{pr}_i^{-1}(0),\quad F_{i1}=\mathrm{pr}_i^{-1}(1)\quad (i\in\mathbb{N})$$

を考える。

命題 3.1. $\xi\in Q$ とするとき、任意の $i\in\mathbb{N}$ および $j\in\{0,1\}$ に対して

$$U_{ij}(\xi)=\{h\in H(Q)\,|\,h(\xi)\notin F_{ij}\}$$

は $H(Q)$ の稠密な開集合である。

この命題を示すためには次の補題を利用する。念のため証明を与えるが、補題が成り立つこと自体は図形的に認めやすいであろう。

補題 3.2. $0<\delta<1$ とする。正方形 $I^2=I\times I$ の自己同相写像 $\varphi_\delta\in H(I^2)$ であって、次の条件を満たすものが存在する。

(i) $\varphi_\delta(\{0\}\times I)=[\delta/3,2\delta/3]\times\{1\}$
(ii) $\varphi_\delta|_{[\delta,1]\times I}=\mathrm{id}$

証明. $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して $\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|\}$ とおく。$p_0=(1/2,1/2)\in I^2$ とすれば、

$$I^2=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,\|x-p_0\|\leqq 1/2\},\quad \partial I^2=I^2\setminus(0,1)^2=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,\|x-p_0\|=1/2\}$$

である。$\pi\colon \partial I^2 \times I \to I^2$ を

$$\pi(x,t) = (1-t)x + tp_0$$

で定めると、π は全射閉写像、したがって商写像である。さらに、

$$\pi(x,t) = \pi(x',t') \iff (x,t) = (x',t') \text{ または } t = t' = 1$$

となることが分かる。実際、$\Longleftarrow$ は明らかである。$\Longrightarrow$ を示すため、$\pi(x,t) = \pi(x',t')$ とすると、$\pi(x,t) - p_0 = \pi(x',t') - p_0$ により $(1-t)(x-p_0) = (1-t')(x'-p_0)$ である。これと $\|x-p_0\| = \|x'-p_0\| = 1/2$ から $t = t'$ が分かる。さらに、$t = t' < 1$ であるとすると、$x - p_0 = x' - p_0$ となるから $x = x'$ である。これで、$\Longrightarrow$ も示された。

さて、$h \in H(\partial I^2)$ とする。$h \times \mathrm{id} \in H(\partial I^2 \times I)$ を考えると、π についていま示した性質から、$\pi \circ (h \times \mathrm{id}) = \Phi(h) \circ \pi$ を満たす $\Phi(h) \in H(I^2)$ がただ一つに定まることがわかる。すると、$\Phi(h)|_{\partial I^2} = h$ である。とくに h として、次で定まる $h_0 \in H(\partial I^2)$ をとろう。

- $h_0(0,x_2) = ((x_2+1)/3, 1)$, $h_0(x_1,1) = ((x_1+2)/3, 1)$, $h_0(1,x_2) = (1,x_2)$
- $0 \leqq x_1 \leqq 1/3$ のとき $h_0(x_1,0) = ((1-3x_1)/3, 1)$
- $1/3 \leqq x_1 \leqq 2/3$ のとき $h_0(x_1,0) = (0, 2-3x_1)$
- $2/3 \leqq x_1 \leqq 1$ のとき $h_0(x_1,0) = (3x_1-2, 0)$

このときの $\Phi(h_0) \in H(I^2)$ と、$\alpha(x_1,x_2) = (\delta x_1, x_2)$ で定まる同相写像 $\alpha\colon I^2 \to [0,\delta] \times I$ を用いて、$\varphi_\delta \in H(I^2)$ を

$$\varphi_\delta|_{[0,\delta]\times I} = \alpha \circ \Phi(h_0) \circ \alpha^{-1}, \quad \varphi_\delta|_{[\delta,1]\times I} = \mathrm{id}$$

によって定めれば、φ_δ は求める性質をもつ。 □

命題 3.1 の証明. この証明では、Q 上の距離としては命題 1.1 の距離

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|x_i - y_i| \quad (x = (x_i),\ y = (y_i) \in Q)$$

を用い、$H(Q)$ 上の距離としては §2 で用いた距離

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in Q} d(f(x), g(x)) \quad (f, g \in H(Q))$$

を用いる。

$\xi \in Q$, $i \in \mathbb{N}$, $j \in \{0,1\}$ とする。写像 $e\colon H(Q) \to Q$ を $e(h) = h(\xi)$ $(h \in H(Q))$ で定義すると、$h, k \in H(Q)$ に対して $d(e(h), e(k)) = d(h(\xi), k(\xi)) \leqq \rho(h,k)$ となるから、e は連続である。F_{ij} は Q の閉集合であり $U_{ij}(\xi) = e^{-1}(Q \setminus F_{ij})$ であるから、$U_{ij}(\xi)$ は $H(Q)$ の開集合である。

次に $U_{ij}(\xi)$ が $H(Q)$ の稠密な部分集合であることを示そう。$j = 0, 1$ のどちらの場合でも同様なので、以下では $j = 0$ とする。$h \in H(Q) \setminus U_{i0}(\xi)$, $\varepsilon > 0$ を任意に与える。すると、$U_{i0}(\xi)$ の定義により

$$\mathrm{pr}_i(h(\xi)) = 0 \qquad (\star\star)$$

であることに注意しておく。このとき、$h' \in H(Q)$ であって $\rho(h', h) < \varepsilon$ かつ $h' \in U_{i0}(\xi)$ であるものを見つければよい。

$n \in \mathbb{N}$ を十分大きくとり、$n > i$ かつ $2^{-n} < \varepsilon/2$ となるようにする。$\delta = \min\{\varepsilon/2, 1/2\}$ とおく。以下では、補題 3.2 の $\varphi_\delta \in H(I^2)$ を Q の第 i 座標と第 n 座標に作用させて Q の自己同相写像 $\tilde{\varphi}_\delta \in H(Q)$ をつくることを考える。それを記述するため、$\alpha \in H(Q)$ を

$$\alpha(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_i, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$$

で定める。$Q' = \prod_{i=3}^{\infty} I$ と書けば、$Q = I^2 \times Q'$ と考えることができ、$\varphi_\delta \times \mathrm{id}_{Q'} \in H(I^2 \times Q') = H(Q)$ が定まるが、このとき $\tilde{\varphi}_\delta \in H(Q)$ を

$$\tilde{\varphi}_\delta = \alpha^{-1} \circ (\varphi_\delta \times \mathrm{id}_{Q'}) \circ \alpha$$

と定義する。このとき、$h' = \tilde{\varphi}_\delta \circ h$ とおけば $h' \in H(Q)$ が求める性質を満たすことを示そう。

補題 3.2 の φ_δ に関する条件 (i) および $(\star\star)$ により、$\mathrm{pr}_n(h'(\xi)) = \mathrm{pr}_n(\tilde{\varphi}_\delta \circ h(\xi)) \in [\delta/3, 2\delta/3] \subset (0, 1]$ である。よって、$h' \in U_{i0}(\xi)$ である。あとは、$\rho(h', h) < \varepsilon$ を示せばよいが、

$$\rho(h', h) = \rho(\tilde{\varphi}_\delta \circ h, \mathrm{id} \circ h) = \rho(\tilde{\varphi}_\delta, \mathrm{id})$$

なので、$\rho(\tilde{\varphi}_\delta, \mathrm{id}) < \varepsilon$ を示せばよい。

そこで、$x \in Q$ とする。$\tilde{\varphi}_\delta$ の定義から、任意の $k \in \mathbb{N} \setminus \{i, n\}$ に対して $\mathrm{pr}_k(x) = \mathrm{pr}_k(\tilde{\varphi}_\delta(x))$ である。また、補題 3.2 の条件 (ii) より、$|\mathrm{pr}_i(\tilde{\varphi}_\delta(x)) - \mathrm{pr}_i(x)| < \delta$ となる。以上より、

$$\begin{aligned} d(\tilde{\varphi}_\delta(x), x) &\leqq 2^{-i} |\mathrm{pr}_i(\tilde{\varphi}_\delta(x)) - \mathrm{pr}_i(x)| + 2^{-n} |\mathrm{pr}_n(\tilde{\varphi}_\delta(x)) - \mathrm{pr}_n(x)| \\ &< 2^{-i}\delta + 2^{-n} \leqq \delta + \varepsilon/2 \leqq \varepsilon \end{aligned}$$

となる。これが任意の $x \in Q$ に対して成り立つので、$\rho(\tilde{\varphi}_\delta, \mathrm{id}) < \varepsilon$ である。 □

命題 3.3. 任意の $x, y \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$ に対して、自己同相写像 $h \in H(Q)$ であって $h(x) = y$ となるものが存在する。

証明. $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ とすると、各 $i \in \mathbb{N}$ に対して $0 < x_i < 1$, $0 < y_i < 1$ であるから、同相写像 $h_i \colon I \to I$ で $h_i(x_i) = y_i$ となるものが簡単に構成できる。そこで、$h \colon Q \to Q$ を $h((t_i)_{i \in \mathbb{N}}) = (h_i(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ により定義すると、$h \in H(Q)$ であって $h(x) = y$ を満たす。 □

命題 3.3 によれば、Q が等質であることを示すには、Q の任意の点が Q のある自己同相写像によって $(0,1)^{\mathbb{N}}$ の点にうつされることを証明すればよい。

定理 3.4. Hilbert 立方体 Q は等質である。

証明. 上の注意をふまえ、Q の点 ξ を任意に与える。同相写像 $h\colon Q \to Q$ であって $h(\xi) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ となるものが存在することを示そう。

この ξ について命題 3.1 の $U_{ij}(\xi)$ は $H(Q)$ の稠密な開集合である。一方、系 2.5 により、$H(Q)$ は完備距離化可能な空間である。よって、Baire のカテゴリー定理により、共通部分

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}(U_{i0}(\xi) \cap U_{i1}(\xi))$$

は $H(Q)$ の稠密な部分集合であり、とくに空ではない。そこで、この共通部分の要素 h を一つとる。すると、

$$h(\xi) \in Q \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(F_{i0} \cup F_{i1}) = (0,1)^{\mathbb{N}}$$

である。 □