位相空間論における反例と線形順序

yamyamtopo

すべての位相空間は、断りのない限り Hausdorff 空間とする。$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ とする。

1 Sorgenfrey 直線

実数直線 $\mathbb{R}$ に半開区間 $[a, b)$ の全体を開基とする位相を導入したものを **Sorgenfrey 直線**という。Sorgenfrey 直線をここでは $\mathbb{S}$ で表す。$\mathbb{S}$ の位相は $\mathbb{R}$ の通常の位相よりも強いから、$\mathbb{S}$ は Hausdorff 空間である。

Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は、正規性・リンデレフ性・パラコンパクト性のいずれも 2 個の直積では保たれないこと同時に示す、とても使い勝手のよい反例である。次の諸性質で、たとえば継承的リンデレフ空間とは、任意の部分空間がリンデレフとなるような空間のことである。完全正規空間 (T_6) は継承的正規空間 (T_5) であることにも注意しておく。

定理 1.1. Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は次の性質を満たす。

(1) $\mathbb{S}$ は正則な継承的リンデレフ空間である。
(2) $\mathbb{S}$ は完全正規空間である。
(3) $\mathbb{S}$ の任意のコンパクト集合は可算集合である。
(4) $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ は正規空間でない。

証明. (1) 閉区間 $[a, b]$ が点 a の $\mathbb{S}$ における閉近傍であることから、$\mathbb{S}$ は正則である。$A \subset \mathbb{S}$ として、$[a, b)$ の形の集合の族 $\mathcal{U}$ が $A \subset \bigcup \mathcal{U}$ を満たすとする。$c \in \mathbb{R}$ を任意に固定するとき、$A \cap [c, x]$ が $\mathcal{U}$ のある可算部分集合により覆われるような $x \geqq c$ 全体の集合 S_c は空ではない。しかも、$\sup S_c < +\infty$ とすると矛盾を生じる。よって、$\sup S_c = +\infty$ である。したがって、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$A \cap [-n, n]$ は $\mathcal{U}$ のある可算部分集合により覆われるから、A もそうである。よって、$\mathbb{S}$ は継承的リンデレフ空間である。

(2) (1) によって $\mathbb{S}$ は正規空間である。完全正規性を示すため、W を $\mathbb{S}$ の開集合とする。W の $\mathbb{R}$ の位相に関する内部 $U = \mathrm{Int}_{\mathbb{R}} W$ について $B = W \setminus U$ とおく。各 $x \in B$ に対して、$\varepsilon_x > 0$ を $I_x = (x, x + \varepsilon_x)$ が W に含まれるように選ぶことができる。このとき、$(I_x)_{x \in B}$ は $\mathbb{R}$ における互いに交わりのない開区間の族だから、B は可算である。とくに、B は $\mathbb{S}$ の F_σ 集合である。一方、U は $\mathbb{R}$ の開集合だから $\mathbb{R}$ の F_σ 集合であり、よって、$\mathbb{S}$ の F_σ 集合でもある。したがって、$W = B \cup U$ は $\mathbb{S}$ の F_σ 集合である。

(3) $K \subset \mathbb{S}$ をコンパクト集合とする。各 $x \in K$ に対して、ある $\varepsilon_x > 0$ が存在して開区間 $I_x = (x - \varepsilon_x, x)$ が K と交わらない。実際、そうでないなら、K における狭義増大列 (x_n) で $\mathbb{R}$ の通常の位相について x に収束するものがあるが、このとき、$\{[x, +\infty)\} \cup \{(-\infty, x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は K の $\mathbb{S}$ における開被覆で有限部分被覆をもたないので、K のコンパクト性に反する。$(I_x)_{x \in K}$ は $\mathbb{R}$ における互いに交わらない開区間の族だから、K は可算集合でなければならない。

(4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \mid x + y = 0\}$ は $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ の閉かつ離散な部分空間である。D 上のすべての実数値関数は連続であるから、D 上の実数値連続関数全体の集合 $C(D, \mathbb{R})$ の濃度は $2^{2^{\aleph_0}}$ である。もし、$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ が正規空間であれば、これらの関数はすべて $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ 上に連続に拡張できるから、$|C(\mathbb{S} \times \mathbb{S}, \mathbb{R})| \geqq 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$ である。一方、$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ は $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ で稠密だから、$|C(\mathbb{S} \times \mathbb{S}, \mathbb{R})| \leqq |C(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \mathbb{R})| \leqq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ となり矛盾する。 □

系 1.2. Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は、次の性質を満たす。

(1) $\mathbb{S}$ は継承的パラコンパクトであるが、$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ はパラコンパクトでない。
(2) $\mathbb{S}$ は完全正規であるが、$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ は正規でない。
(3) $\mathbb{S}$ はリンデレフ空間であるが、σ コンパクトではない。
(4) $\mathbb{S}$ は距離化可能ではない。 □

興味深いことに、Sorgenfrey 直線の部分集合が稠密であることは、それが実数直線の部分集合として稠密であることと同値である。実際、そのどちらも、補集合がいかなる開区間も含まないことと同値である。このことから、次が分かる。

命題 1.3. Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は Baire 空間である。すなわち、$\mathbb{S}$ の可算個の稠密開集合の共通部分は稠密である。 □

$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ がパラコンパクトでないという事実は、パラコンパクト性が 2 個の空間の積で必ずしも保たれないことを示すには十分である。しかし、実際に言えているのは、$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ が正規でないことであり、パラコンパクトでないことはその副産物に過ぎないという物足りなさを感じる読者がいるかもしれない。

そこで、パラコンパクトな空間 X, Y で、$X \times Y$ は正規だがパラコンパクトでないようなものが存在するかが自然な問題となる。この問題は難しく、Przymusiński がリンデレフ空間 X で $X \times X$ が正規だがパラコンパクトではないようなものの例を構成することで解決された。このような例は、当初は Martin の公理と連続体仮説の否定 $(\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH})$ を仮定して構成されたが [12]、 最終的に ZFC での構成に成功している [13]。

2　辞書式順序の正方形・二本矢の空間

2.1　線形順序空間とコンパクト性

X を全順序集合とする。形式的に、X のすべての元よりも大きい元 $+\infty$ とすべての元よりも小さい元 $-\infty$ を付け加えておくとき、$a, b \in X \cup \{\pm\infty\}$ によって $(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$ と表される集合を X の**開区間**と呼び、開区間の全体を開基とする位相を X 上の順序位相という。ある全順序に関する順序位相をもつ位相空間を、**線形順序位相空間**、あるいは**線形順序空間**という。線形順序空間は、容易にわかるように Hausdorff 空間である。

全順序集合 X が**完備**であるとは、X の任意の部分集合 S が上限 $\sup S$ および下限 $\inf S$ をもつことをいう。完備な全順序集合 X は、X 自身が上限・下限をもつから、最大元と最小元をもつ。また、次に注意する。

命題 2.1. 全順序集合 X に対して、次は同値である。

(1) X は完備である。
(2) X の任意の部分集合は上限をもつ。
(3) X の任意の部分集合は下限をもつ。

証明. (2) $\Rightarrow$ (3) のみ示せば十分である。X の任意の部分集合が上限をもつとして、$S \subset X$ とする。S' を S の下界全体のなす X の部分集合とすると、$\sup S'$ は S の下限を与える。 □

定理 2.2. X が全順序 $\leqq$ について空でない線形順序空間であるとき、次は同値である。

(1) X はコンパクトである。
(2) X は全順序集合として完備である。

証明. (1)$\Rightarrow$(2): 全順序集合 X に対して、$S \subset X$ が上限をもたないとする。このとき、S_+ を S の上界全体の集合とすると、$\{(-\infty, x) \mid x \in S\} \cup \{(y, +\infty) \mid y \in S_+\}$ は X の開被覆であって有限部分被覆をもたない。

(2)$\Rightarrow$(1): 全順序集合 X が完備であるとして、x_0 を X の最小元とする。$\mathcal{U}$ を X の開被覆とし、

$$S = \{x \in X \mid [x_0, x] \text{ は } \mathcal{U} \text{ のある有限部分集合で覆われる }\}$$

とおく。X は完備なので $x_1 = \sup S$ が存在するが、$x_1 \in S$ であること、および x_1 が X の最大元でなければならないことが容易に示される。したがって、$X = [x_0, x_1]$ の開被覆 $\mathcal{U}$ は有限部分被覆をもつ。 □

線形順序空間のより詳しい性質は、第 4, 7 節で述べる。

2.2　辞書式順序の正方形・二本矢の空間

$I=[0,1]$ とする。集合 $I\times I$ に辞書式順序を導入する。つまり、$(x,y),(x',y')\in I\times I$ に対して

$$(x,y)\leqq(x',y') \iff x<x' \text{ または } (x=x' \text{ かつ } y\leqq y')$$

とする。$I\times I$ 上に辞書式順序 $\leqq$ を入れて得られる線形順序空間をここでは $\mathbb{X}$ で表す。また、集合 $I\times\{0,1\}$ にこの順序を制限して得られる線形順序空間を $\mathbb{A}$ で表す。この空間 $\mathbb{A}$ は**二本矢の空間 (double arrow space)** と呼ばれる。$\mathbb{A}$ は $\mathbb{X}$ の閉集合であり、$\mathbb{A}$ 上の位相は $\mathbb{X}$ からの相対位相に一致することが簡単に確認できる。

$\mathbb{A}$ の部分空間 $\mathbb{S}_1=(0,1)\times\{1\}=\{(x,1)\,|\,0<x<1\}$ は、$[a,b)\times\{1\}\;(0<a<b<1)$ の形の集合全体を開基にもつから、Sorgenfrey 直線と同相である。同様に、$\mathbb{A}$ の部分空間 $\mathbb{S}_0=(0,1)\times\{0\}$ も $(a,b]\times\{0\}$ の形の集合全体を開基にもつから、Sorgenfrey 直線と同相である。結局、$\mathbb{X}$ や $\mathbb{A}$ は Sorgenfrey 直線と同相な互いに交わりのない部分空間 $\mathbb{S}_0,\mathbb{S}_1$ をもつ。2 点 $(0,0),(1,1)$ はそれぞれ $\mathbb{X}$ の孤立点であり、$\mathbb{S}_0,\mathbb{S}_1$ は $\mathbb{S}_0\cup\mathbb{S}_1$ においてそれぞれ稠密である。

定理 2.3. 空間 $\mathbb{X}$ は、次の性質を満たす。

(1) $\mathbb{X}$ はコンパクトかつ第一可算である。
(2) $\mathbb{X}$ は可分でない[*1]。
(3) $\mathbb{X}$ は完全正規でない。よって、$\mathbb{X}$ は距離化可能でない。

証明. (1) 閉区間 I が全順序集合として完備であることから、$\mathbb{X}$ も全順序集合として完備であることが簡単に示される。このことから定理 2.2 により $\mathbb{X}$ はコンパクトである。第一可算性は、$\mathbb{X}$ 上の順序の定め方から直ちに確認できる。

(2) 各 $x\in I$ に対して $U_x=\{x\}\times(0,1)$ は $\mathbb{X}$ の開集合であり、$x\neq y$ のとき $U_x\cap U_y=\emptyset$ である。$A\subset X$ を稠密集合とすると、各 $x\in I$ に対して $A\cap U_x\neq\emptyset$ であるから A は非可算でなければならない。したがって、$\mathbb{X}$ は可分ではない。

(3) $\mathbb{X}$ の閉集合 $\mathbb{A}$ が G_δ 集合でないことを証明すればよい。$\mathbb{X}$ の開集合 U_i によって $\mathbb{A}=\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i$ と表されたとする。(1) により、U_i は $\mathbb{X}$ の開区間の有限和として表されるとしてよいが、このとき、開区間の（$\pm\infty$ でない）端点の第 1 成分として現れる数全体のなす有限集合を S_i とする。すると、$x\in I\setminus S_i$ のとき $\{x\}\times I\subset U_i$ であることに注意する。$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ は可算だから $x_0\in I\setminus S$ が存在するが、このとき $(x_0,1/2)\in\{x_0\}\times I\subset\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i=\mathbb{A}$ となるから矛盾する。 □

定理 2.4. 二本矢の空間 $\mathbb{A}$ は、次の性質を満たす。

(1) $\mathbb{A}$ はコンパクトかつ第一可算である。
(2) $\mathbb{A}$ は可分である。

[*1] 証明をみればわかる通り、実際にはより強く、可算鎖条件 (c.c.c.) を満たさない（第 7 節参照）。

(3) $\mathbb{A}$ は継承的リンデレフである。

(4) $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ は継承的正規でない。よって、$\mathbb{A}$ は距離化可能でない。

証明. (1) $\mathbb{X}$ は定理 2.3 (1) によりコンパクトかつ第一可算であるから、その閉部分空間である $\mathbb{A}$ もコンパクトかつ第一可算である。

(2) $(\mathbb{Q}\cap I)\times\{0,1\}\subset\mathbb{A}$ は可算な稠密集合となる。

(3) $\mathbb{A}$ は Sorgenfrey 直線と同相な $\mathbb{S}_0,\mathbb{S}_1$ の和集合に 4 点を加えたものである。定理 1.1(1) により Sorgenfrey 直線が継承的リンデレフであることから、$\mathbb{A}$ も継承的リンデレフである。

(4) $\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ は $\mathbb{S}_0\times\mathbb{S}_0$ を部分空間にもつが、定理 1.1 (4) により $\mathbb{S}_0\times\mathbb{S}_0$ は正規でない。よって、$\mathbb{A}\times\mathbb{A}$ は継承的正規でない。 □

二本矢の空間 $\mathbb{A}$ は $\mathbb{X}$ とは異なり完全正規となるが、それは次の事実からわかる。

命題 2.5. 正則な継承的リンデレフ空間は、完全正規である。

証明. X を正則な継承的リンデレフ空間とする。X はとくに正則なリンデレフ空間だから、正規である。あとは、X の任意の開集合が F_σ 集合となることを示せばよい。U を X の開集合とする。U の開被覆 $\mathcal{V}$ であって、各 $V\in\mathbb{V}$ に対して $\mathrm{Cl}\,V\subset U$ であるようなものが存在する。この $\mathcal{V}$ は可算部分被覆 $\{V_n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ をもつが、このとき $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{Cl}\,V_n$ なので、U は F_σ 集合である。 □

系 2.6. 二本矢の空間 $\mathbb{A}$ は完全正規である。 □

3 Michael 直線

3.1 Michael 直線の意義と諸性質

Sorgenfrey 直線は実数直線 $\mathbb{R}$ により強い位相を入れて得られる空間だった。別の方法で $\mathbb{R}$ の位相を強めてできる有名な例に、Michael 直線がある。以下では、$\mathbb{R}$ の通常の位相、開集合のことをユークリッド位相、ユークリッド開集合と呼ぶ。また、$A\subset\mathbb{R}$ に対しては、ユークリッド位相の相対位相のことを A 上のユークリッド位相と呼ぶ。

無理数全体の集合 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ を、ここでは簡単に $\mathbb{P}$ で表す。$\mathbb{R}$ 上のユークリッド開集合の全体を $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ で表すとき、集合 $\mathbb{R}$ 上に

$$\mathcal{O}_\mathbb{R}\cup\{\{x\}\,|\,x\in\mathbb{P}\}\qquad(\star)$$

を開基として生成される位相を導入したものを、**Michael 直線**という。ここでは Michael 直線を $\mathbb{M}$ で表すことにことにする。Michael 直線 $\mathbb{M}$ は、通常の直線 $\mathbb{R}$ をもとに、無理数の点をすべて孤立点にして得られる空間であるといえる。

$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{M}$ からの相対位相は、ユークリッド位相と一致する。 したがって、Michael 直線 $\mathbb{M}$ には、ユークリッド位相をもった $\mathbb{Q}$ が閉集合として埋め込まれており、その補集合 $\mathbb{P}$ は離散位相をもった稠密な開集合になっている。

正規空間であるという性質がどのくらい直積で保たれるかは複雑であり、位相空間論で数多くの研究の対象になってきた。もちろん、正規空間と離散空間の直積は正規空間である[*2]。では、正規空間 X と単位閉区間 I との直積 $X \times I$ は正規であろうか？　この問題はホモトピー拡張定理の文脈から提起された。この命題の反例となる正規空間 X は **Dowker 空間**と呼ばれ、それを一つ構成することさえ初等的ではなく、深い研究の対象となっている。

正規空間 X が Dowker 空間であることは、あるコンパクト距離空間との直積が正規でないことと同値であることがよく知られている。Dowker 空間を構成するのは容易ではないのであるが、直積する相手への要求をコンパクト距離空間から「完備距離空間」まで緩めれば、Michael 直線 $\mathbb{M}$ が簡単な例になっている。実際、後で示すように、$\mathbb{M}$ は正規であって、無理数全体 $\mathbb{P}$ にユークリッド位相を入れるとき $\mathbb{M} \times \mathbb{P}$ は正規でない。ここでの $\mathbb{P}$ は通常の距離については完備ではないが、位相に合致した完備距離が存在する、つまり完備距離化可能である（命題 3.3)。

もちろん、Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は、$\mathbb{S}$ 自身との積が正規ではないのであるが、直積の相手としての $\mathbb{S}$ は距離化可能ですらない「悪い空間」だから、反例としてのインパクトはある意味薄い。その点、直積の相手として完備距離空間を取れる Michael 直線の方が「きわどい」反例であるということが言えるかもしれない。さて、前置きはこの程度にして性質の証明に入る。

定理 3.1. Michael 直線 $\mathbb{M}$ は次の性質を満たす。

(1) $\mathbb{M}$ は継承的パラコンパクトであり、したがって継承的正規である。
(2) $\mathbb{M} \times \mathbb{P}$ は正規空間でない。ここで、$\mathbb{P}$ はユークリッド位相をもつと考える。
(3) $\mathbb{M}$ は完全正規空間でない。
(4) $\mathbb{M}$ は可分でない。
(5) $\mathbb{M}$ はリンデレフ空間でない。

証明. (1) まず、$\mathbb{M}$ 自身がパラコンパクトであることを示そう。$\mathcal{U}$ を $\mathbb{M}$ の開被覆であるとして、$\mathcal{U}$ を細分する局所有限な開被覆が存在することを示す。$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cup \{\{x\} \mid x \in A\}$ と表されるとしてよい。ここで、$\mathcal{U}'$ はユークリッド開集合からなる族で、$A \subset \mathbb{P}$ である。$U = \bigcup \mathcal{U}'$ とおくと、ユークリッド位相について $\mathcal{U}'$ はパラコンパクト空間 U の開被覆になっているから、U のユークリッド位相についての開被覆 $\mathcal{U}''$ であって、$\mathcal{U}'$ を細分し、ユークリッド位相について U において局所有限であるものが存在する。このとき、$\mathcal{U}'' \cup \{\{x\} \mid x \in A\}$ は $\mathbb{M}$ の開被覆で、$\mathcal{U}$ を細分し、$\mathbb{M}$ において局所有限である。継承的パラコンパクト性を示すには、$\mathbb{M}$ の任意の開部分空間がパラコンパクトであることを示せば十分である。その証明はいままでの議論とまったく同様なので省略する。

(2) 直積空間 $X = \mathbb{M} \times \mathbb{P}$ の部分集合として、$F = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{P}\}$ および $H = \mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ を考えると、F, H はともに X の閉集合であり、$F \cap H = \emptyset$ である。$U \subset X$ を F の開

[*2] なんと、この離散空間という条件は少しも弱めることが許されない。つまり、離散空間でない正規空間は、ある正規空間との直積が正規でない、ということが知られている。これは森田紀一により予想され、Balogh により 1996 年に証明された。

近傍とするとき $\mathrm{Cl}_X U \cap H \neq \emptyset$ を示そう。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$A_n = \{x \in \mathbb{P} \mid y \in \mathbb{P},\, |y-x| < 1/n \text{ ならば } (x,y) \in U\}$$

とおけば、$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{P}$ である。よって、$\mathbb{Q} = \{q_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ と表せば、$B_n = \{q_n\}$ に対して $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R}$ である。もし、すべての n に対して A_n が $\mathbb{R}$ の閉集合であったとすれば、$A_n \subset \mathbb{P}$ により $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}} A_n = \emptyset$ であることから Baire のカテゴリー定理に反する。よって、ある n に対して A_n は $\mathbb{R}$ の閉集合ではないから、$a \in \mathrm{Cl}\, A_n \cap \mathbb{Q}$ が存在する。$b \in \mathbb{P}$ を $|b-a| < 1/2n$ となるようにとる。このとき、もちろん $(a,b) \in H$ であるから、$(a,b) \in \mathrm{Cl}_X U$ となることを示せばよい。そのため $0 < \varepsilon < 1/2n$ となる ε を任意に与える。このとき

$$U \cap \big((a-\varepsilon, a+\varepsilon) \times \{b\}\big) \neq \emptyset \tag{$\star$}$$

を示せば十分である。$a \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}} A_n$ であるから、$a' \in A_n$ であって $|a-a'| < \varepsilon$ となるものが存在する。すると、$|b-a'| < |b-a| + |a-a'| < 1/2n + 1/2n = 1/n$ であるから、A_n の定義によって $(a',b) \in U$ となる。よって、($\star$) の左辺には実際に点 (a',b) が属するから、($\star$) が示され証明が終わった。

(3) もし、$\mathbb{M}$ が完全正規空間であれば、その閉集合 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{M}$ の G_δ 集合である。このとき、$\mathbb{M}$ の位相の定め方から、$\mathbb{Q}$ はユークリッド位相についても G_δ 集合である。言い換えると、$\mathbb{P}$ はユークリッド位相についての閉集合 F_n を用いて $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ と表される。よって、(2) と同じ要領で $\mathbb{R}$ に Baire のカテゴリー定理を用いるとある n に対して $\mathrm{Int}_{\mathbb{R}} F_n \neq \emptyset$ となるはずだが、$\mathrm{Int}_{\mathbb{R}} F_n \subset \mathrm{Int}_{\mathbb{R}} \mathbb{P} = \emptyset$ であるから矛盾する。

(4) $\mathbb{M}$ の可算部分集合 $A \subset \mathbb{M}$ を任意に与えると、$\mathbb{P}$ の非可算性から $p \in \mathbb{P} \setminus A$ が存在する。p は孤立点であるから、$p \notin \mathrm{Cl}_{\mathbb{M}} A$ である。よって、$\mathbb{M}$ は可分ではない。

(5) ユークリッド位相に関する $\mathbb{R}$ の非可算な閉集合 C であって、$\mathbb{P}$ に含まれるものが存在する。この事実は、このすぐ後に示す補題 3.2 から直ちにわかる[*3]。この C は $\mathbb{M}$ においても閉集合だから、もし $\mathbb{M}$ がリンデレフであれば、その部分空間 C もリンデレフである。しかし、$C \subset \mathbb{P}$ であるから、C は非可算な離散空間となり、したがってリンデレフではなく矛盾する。 □

上の (5) で必要となった事実を証明する。

補題 3.2. $W \subset \mathbb{R}$ が稠密な G_δ 集合であるならば、W は非可算なコンパクト集合を含む。

証明. W に含まれるようにカントール集合を構成しよう。W は稠密な G_δ 集合だから、稠密な開集合 $G_n \subset \mathbb{R}$ が存在して $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ となる。まず、$I_0 = [0,1]$ とする。$n \geqq 1$ のときには、2^n 個の互いに交わりのない有界閉区間の和集合 I_n を、I_{n-1} のどの

[*3] ルベーグ測度を使う方法もある。$\mathbb{Q} = \{q_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ と表して、$U_n = (q_n - 2^{-n}, q_n + 2^{-n})$ とすれば、$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ のルベーグ測度は $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-n} = 2$ を超えず、とくに有限なので、$C = \mathbb{R} \setminus U$ は非可算である。

連結成分にも I_n のちょうど 2 個の連結成分が含まれ、かつ $I_n \subset G_n$ となるように帰納的に構成する。このとき、カントール集合 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ は W に含まれる非可算なコンパクト集合である。 □

3.2 無理数全体の空間 $\mathbb{P}$ 上の完備距離

無理数全体の集合 $\mathbb{P}$ がユークリッド位相について完備距離化可能であることの証明を与える。それには、次の一般論を使うのが簡単である。

命題 3.3. X が完備距離化可能であるとき、X の任意の G_δ 集合は部分空間として完備距離化可能である。よって、$\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の部分空間として完備距離化可能である。

証明. d を X の位相に合致した完備距離とする。$G \subset X$ を G_δ 集合とすると、$X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ となる X の閉集合 F_n が存在する。連続関数 $\rho_n \colon X \setminus F_n \to \mathbb{R}$ を $\rho_n(x) = 1/d(x, F_n)$ で定め、$\bar{d} \colon G \times G \to \mathbb{R}$ を

$$\bar{d}(x,y) = d(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, |\rho_n(x) - \rho_n(y)|\}$$

で定義する。これが G 上の相対位相に合致した完備距離であることは易しい。 □

この命題には逆が成り立つので、それにふれておこう。

命題 3.4. X が距離空間、$Y \subset X$ が完備距離化可能な部分空間であれば、Y は X の G_δ 集合である。

証明. X を $\operatorname{Cl} Y$ におきかえて、Y は X で稠密であるとしてよい。ρ を Y 上の位相に合致した完備距離とする。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$G_n = \{x \in X \mid x \text{ のある開近傍 } U \text{ に対して } \operatorname{diam}_\rho(U \cap Y) < 1/2^n\}$$

とおく。ここで、$\emptyset \neq A \subset Y$ に対して $\operatorname{diam}_\rho A = \sup_{a,b \in A} \rho(a,b)$ とする。このとき G_n は X の開集合であって、ρ の完備性から $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ である。 □

$\mathbb{P}$ 上の完備距離の具体的な構成を与えるには、無理数の連分数展開を用いるとよい。$0 < \alpha < 1$ なる無理数 α は

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

と一意的に連分数展開できる。ここで、a_n は正の整数である。逆に、正の整数からなる列 $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ が与えられれば、上のような連分数展開をもつ $0 < \alpha < 1$ なる無理数 α が定まる。以上の事実から、連分数展開は全単射 $\mathbb{P} \cap (0,1) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ を与えるが、この対

応は、$\mathbb{P}\cap(0,1)$ 上のユークリッド位相と $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上の直積位相について同相写像である。この事実は、写像の構成をよく見て示すことができる。さて、$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 上には直積位相に合致した完備な距離

$$d((a_n),(b_n))=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\delta(a_n,b_n)$$

がある。ここで、$\delta(a,b)$ は $a=b$ のとき 1 の値をとり、$a\neq b$ のとき 0 の値をとるものとする。したがって、$\mathbb{P}\cap(0,1)$ 上にはこの距離を引き戻すことで完備な距離が得られる。

あとは、$\mathbb{P}\cap(0,1)$ と $\mathbb{P}$ との間の同相写像を構成すれば、$\mathbb{P}$ 上の完備な距離が得られるが、これは例えば

$$\mathbb{P}\cap(0,1)\approx\mathbb{P}\cap(-1,1)\approx\mathbb{P}\setminus[-1,1]\approx\mathbb{P}$$

のようにすればよい。ここで、第 1 の同相写像は 1 次関数 $t\mapsto 2t-1$ であり、第 2 の同相写像は $t\mapsto 1/t$ であり、第 3 の同相写像は正の部分で -1 だけ、負の部分で $+1$ だけ、それぞれ平行移動する写像である。

系 3.5. Michael 直線 $\mathbb{M}$ は継承的パラコンパクト空間であるが、ある完備距離空間との積が正規でない。 □

3.3 Bernstein 集合を用いたバージョン

前に構成した Michael 直線は、リンデレフ空間でない・可分でない・完全正規空間でない（定理 3.1）など Sorgenfrey 直線と比べてもあまり性質はよくない。以下では、Michael 直線に少し修正を加えてリンデレフ空間にする方法を述べる。

$\mathbb{R}$ の部分集合 B が **Bernstein 集合**であるとは、$\mathbb{R}$ の任意の非可算な閉集合 C に対して $C\cap B\neq\emptyset$ かつ $C\cap(\mathbb{R}\setminus B)\neq\emptyset$ が成り立つことをいう。Bernstein 集合が Michael 直線の修正版に必要な材料なのであるが、まずその存在を証明しておく。

補題 3.6. $\mathbb{R}$ の閉集合については連続体仮説が成立する。すなわち、$\mathbb{R}$ の非可算な閉集合の濃度は $2^{\aleph_0}$ である。

証明. C を $\mathbb{R}$ の非可算な閉集合とする。$|C|\leqq|\mathbb{R}|\leqq 2^{\aleph_0}$ なので $|C|\geqq 2^{\aleph_0}$ を示せばよい。そのためには、次のような C_0,C_1 を構成すればよい。

(i) $C_0,C_1\subset C$, $C_0\cap C_1=\emptyset$ である。
(ii) C_0,C_1 はコンパクトな非可算集合である。

実際、これができれば、C_0,C_1 に同じ構成を適用して C_{00},C_{01} および C_{10},C_{11} をつくることができ、帰納的に 0, 1 からなるすべての有限列 s に対して C_s が定義できる。このとき、各無限列 $\sigma\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に対して $C_\sigma=\bigcap_{n=1}^{\infty}C_{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(n)}$ とおけば、$C_\sigma\neq\emptyset$ で $\sigma\neq\tau$ のとき $C_\sigma\cap C_\tau=\emptyset$ である。しかも、$C_\sigma\subset C$ であるから、$|C|\geqq\sum_{\sigma\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}|C_\sigma|\geqq 2^{\aleph_0}$ となり、証明が終わる。

さて、

$$D = \{x \in C \,|\, \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap C \text{ は非可算 }\}$$

とおくと、C が非可算であることから D は非可算でなければならない。また、D は孤立点をもたない閉集合であることも定義から確かめられる。

D の異なる 2 点 a_0, a_1 を固定し、$a_i \in U_i$ となる $\mathbb{R}$ の有界な開集合 U_i を $\mathrm{Cl}\, U_0 \cap \mathrm{Cl}\, U_1 = \emptyset$ となるようにとる。$C_i = D \cap \mathrm{Cl}\, U_i$ とおくと C_i は孤立点のないコンパクト集合であって条件 (i) を満たす。また D の定義から、C_i は非可算となるので、条件 (ii) も満たす。これで証明が終わった。 □

定理 3.7. Bernstein 集合は存在する。

証明. $\mathbb{R}$ には可算開基があるから、$\mathbb{R}$ の開集合の個数は $2^{\aleph_0}$ 個で、よって、閉集合の個数も $2^{\aleph_0}$ 個である。そこで、$\mathbb{R}$ の非可算な閉集合全体を整列して $\{C_\alpha \,|\, \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$ と表す。補題 3.6 により、各 $\alpha \in 2^{\aleph_0}$ に対して $|C_\alpha| = 2^{\aleph_0}$ であることに注意すると、超限帰納法により $a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}\,(\alpha \in 2^{\aleph_0})$ を

$$a_\alpha \neq b_\alpha \text{ かつ } a_\alpha, b_\alpha \in C_\alpha \setminus \{a_\xi, b_\xi \,|\, \xi < \alpha\}$$

となるように選ぶことができる。$B = \{b_\alpha \,|\, \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$ は Bernstein 集合である。 □

補題 3.8. Bernstein 集合は $\mathbb{R}$ において稠密であり、F_σ 集合でも G_δ 集合でもない。とくに、Bernstein 集合は非可算である。

証明. $B \subset \mathbb{R}$ を Bernstein 集合とする。もし B が $\mathbb{R}$ において稠密でなければ、開区間 $U \subset \mathbb{R} \setminus B$ が存在するが、U には非可算な閉集合（たとえば閉区間）が含まれるから、B が Bernstein 集合であることに反する。B が F_σ 集合でも G_δ 集合でもないことは、$\mathbb{R} \setminus B$ も Bernstein 集合であることに注意すれば補題 3.2 から分かる。 □

さて、Bernstein 集合 B が一つ与えられたとき、空間 $\mathbb{M}_B$ を Michael 直線にならって次のように構成する。$\mathbb{R}$ 上のユークリッド開集合の全体を $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ で表すとき、集合 $\mathbb{R}$ 上に

$$\mathcal{O}_\mathbb{R} \cup \{\{x\} \,|\, x \in B\}$$

を開基として生成される位相を導入したものを $\mathbb{M}_B$ とする。つまり、$\mathbb{M}_B$ は Michael 直線において孤立点となる部分を無理数全体 $\mathbb{P}$ から Bernstein 集合 B に変更したものである。

定理 3.9. 空間 $\mathbb{M}_B$ は次の性質を満たす。

(1) $\mathbb{M}_B$ は継承的パラコンパクトであり、したがって継承的正規である。
(2) $\mathbb{M}_B \times B$ は正規空間でない。ここで、B はユークリッド位相をもつと考える。
(3) $\mathbb{M}_B$ は完全正規空間でない。
(4) $\mathbb{M}_B$ は可分でない。

(5) $\mathbb{M}_B$ はリンデレフ空間である。

証明. (1)(4) 定理 3.1 とまったく同様である。

(2)(3) 定理 3.1 のときに証明に用いた $\mathbb{P}$ の性質は、「$\mathbb{P}$ は $\mathbb{R}$ の F_σ でない稠密な部分集合である」という性質だけである。補題 3.8 で述べた通り、Bernstein 集合 B はこの性質をもつから、証明は定理 3.1 のときとまったく同様である。

(5) $\mathcal{U}$ を $\mathbb{M}_B$ の開被覆とする。$\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cup \{\{x\} \mid x \in S\}$ と表されるとしてよい。ここで、$\mathcal{U}'$ は $\mathbb{R}$ の開集合からなる族で、$S \subset B$ である。$U = \bigcup \mathcal{U}'$ とおくと、$X \setminus U$ は $\mathbb{R}$ の閉集合で、$X \setminus U \subset S \subset B$ となるから、$X \setminus U$ は可算である。一方、U は $\mathbb{R}$ の相対位相についてリンデレフ空間だから、$\mathcal{U}'$ の可算部分集合 $\mathcal{U}''$ で、$\bigcup \mathcal{U}'' = U$ となるものが存在する。$\mathcal{U}'' \cup \{\{x\} \mid x \in X \setminus U\}$ は $\mathcal{U}$ の可算部分被覆である。 □

$\mathbb{M}_B$ は $\mathbb{M}$ に比べてリンデレフ性をもつという意味で良い空間になっているが、いわばそれと引き換えに、正規でない積空間を得るためには完備距離化可能な $\mathbb{P}$ の代わりに B というより悪い空間を必要としていることに注意する。実際、B は $\mathbb{R}$ の G_δ 集合でないから完備距離化可能でない（補題 3.8, 命題 3.4）。しかし、B は可分距離空間だから、次のことは言えている。

系 3.10. Bernstein 集合 B に対して、$\mathbb{M}_B$ は継承的パラコンパクトなリンデレフ空間であるが、ある可分距離空間との積が正規でない。 □

なお、$\mathbb{M}_B$ は継承的リンデレフではない。実際、B は $\mathbb{M}_B$ の非可算な離散部分空間だからリンデレフではない。

4 線形順序空間と GO 空間

4.1 線形順序空間のもつ強い正規性について

位相空間 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ が X において**疎 (discrete)** とは、任意の $x \in X$ に対して、x の近傍 U であって $\mathcal{A}$ の高々 1 個の元と交わるようなものが存在することをいう。X が**族正規 (collectionwise normal)** であるとは、X の任意の疎な閉集合族 $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して[*4]、X の互いに交わらない開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で $F_\lambda \subset U_\lambda$ を満たすものが存在することをいう。族正規空間はもちろん正規空間である。

補題 4.1. 位相空間 X に対して、次は同値である。

(1) X は継承的族正規である。すなわち、任意の部分空間が族正規である。
(2) X の任意の開部分空間は族正規である。
(3) X の部分集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ において疎ならば、 X の互い

[*4] 集合族を $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ のように添え字づけた形で与える場合、写像 $\lambda \mapsto F_\lambda$ が単射であることを仮定する。もちろん、集合族に何らかの操作を加えた結果、この仮定を満たさない集合族が現れる場合はあり得る。

に交わらない開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \subset U_\lambda$ を満たすものが存在する。

証明. (1)⇒(2) は明らかである。

(2)⇒(3): (2) を仮定し、 X の部分集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ がその和集合 $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ において疎であるとすると、各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \subset V_\lambda$ となる X の開集合 V_λ を $V_\lambda \cap \bigcup_{\mu\neq\lambda} A_\lambda = \emptyset$ となるように取ることができる。$V = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ は X の開集合であって、$F_\lambda = \mathrm{Cl}_V A_\lambda$ とおけば $\lambda \neq \mu$ のとき $V_\lambda \cap F_\mu = \emptyset$ である。よって、$\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は V において疎な V の閉集合族となるから、(2) により、$F_\lambda \subset U_\lambda \subset V$ となる互いに交わらない X の開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在する。

(3)⇒(1): (3) を仮定し、$Y \subset X$ として、$\mathcal{F} = \{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ は Y において疎であるとする。このとき、$\mathcal{F}$ は $\bigcup \mathcal{F}$ において疎であるから、X の互いに交わらない開集合の族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ で $F_\lambda \subset U_\lambda$ となるものが存在する。$U_\lambda \cap Y\ (\lambda \in \Lambda)$ が求める Y の開集合である。 □

定理 4.2. 線形順序空間は、継承的族正規である。

証明. X が全順序 $\leqq$ に関して順序位相空間であるとする。記述の都合上、X に最大元 $+\infty$ と最小元 $-\infty$ を追加して $\tilde{X} = X \cup \{\pm\infty\}$ を考える。補題 4.1 の条件 (3) を示すため、X の部分集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ がその和集合 $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ において疎であるとする。集合 $x, y \in X \setminus A$ に対して、$x \sim y$ であることを、x, y を両端とする閉区間が $X \setminus A$ に含まれることと定義すれば、$\sim$ は同値関係である。$\sim$ に関する同値類を成分と呼ぶことにし、各成分 J に対して、代表元 c_J を選んでおく。

各 $x \in A$ に対して、x を含む $\tilde{X}$ の開区間 $I_x = (s_x, t_x)$ を定め、

$$x \in A_\lambda,\ y \in A_\mu,\ \lambda \neq \mu \implies I_x \cap I_y = \emptyset \tag{$\star$}$$

が成り立つようにしよう。これができれば、$U_\lambda = \bigcup_{x\in A_\lambda} I_x$ が求める開集合である。$x \in A_\lambda \subset A$ とする。3 つの場合に分けて t_x を定義する。

[場合 1] x が $\tilde{X}$ において直後の元 $\bar{x}$ をもつ場合。$t_x = \bar{x}$ とする。

[場合 2] x の $\tilde{X}$ における直後の元がなく、$(x, x'] \cap A = \emptyset$ となるような $x' \in X$ が存在する場合。そのような x' の全体が一つの成分 $J(x)$ をなすので、$t_x = c_{J(x)}$ と定める。

[場合 3] それ以外の場合。$t_x \in A_\lambda$ を $(x, t_x) \cap (A \setminus A_\lambda) = \emptyset$ となるように定める。

いずれの場合でも、$(x, t_x) \cap (A \setminus A_\lambda) = \emptyset$ が成り立つことに注意する。s_x についても順序の大小を入れ替えて同様の場合分けを行い（それらを「場合 $1'$」「場合 $2'$」「場合 $3'$」と呼ぶ)、まったく同じように定義する。これについても $(s_x, x) \cap (A \setminus A_\lambda) = \emptyset$ となる。

さて、条件 $(\star)$ が成り立つことをチェックする。$x \in A_\lambda, y \in A_\mu, \lambda \neq \mu$ とし、$z \in I_x \cap I_y$ であるとして矛盾を導こう。$x < y$ であるとしてよい。x について場合 1 が成立すれば、$s_y < z \leqq x < y$ だから、$x \in (s_y, y) \cap (A \setminus A_\mu)$ となり矛盾する。次に、x について場合 2 が成立すれば、$s_y < z < c_{J(x)} < y$ だから、y については場合 $1'$ は成立しない。場合 $2'$ ならば s_y と $c_{J(x)}$ は同じ成分にあるから $s_y = c_{J(x)}$ となり矛盾する。場合 $3'$ ならば、$s_y \in A_\mu$ であるから、$s_y < c_{J(x)} < y$ により $s_y < x < c_{J(x)} < y$ であり、$x \in (s_y, y) \cap (A \setminus A_\mu) = \emptyset$ となり矛盾する。最後に、x について場合 3 が成立すれば、

$s_y < z < t_x < y$ かつ $t_x \in A_\lambda$ なので、$t_x \in (s_y, y) \cap (A \setminus A_\mu)$ となり、矛盾する。 □

4.2 GO 空間とその特徴付け

線形順序空間 X の部分集合 Y には、(i) X からの相対位相、(ii) X の順序の制限から決まる順序位相の 2 通りの位相が入る。(i) の方が強い位相であり、一般には両者は異なるので注意が必要である。ただし、次の場合は、(i) (ii) の位相は一致する。

(a) Y が X において**凸 (convex)** であるとき：すなわち、任意の $y, y' \in Y$ に対して $[y, y'] \subset Y$ であるとき。
(b) Y が全順序集合 X において**順序稠密**であるとき：すなわち、$x < x'$ を満たす任意の $x, x' \in X$ に対して、$y, y' \in Y$ で $x \leqq y < y' \leqq x'$ となるものが存在するとき[*5]。

ここで、(b) は X の順序位相について Y が稠密な部分集合であることよりも真に強い条件である。たとえば、$X = \{0\} \cup [1, \infty) \subset \mathbb{R}$ に通常の順序を入れたものと $Y = X \setminus \{1\}$ を考えると、順序位相について Y は X で稠密であるが、(b) の条件を満たさない。そして、この Y について、(i)(ii) の 2 つの位相は異なっている。

前節の Sorgenfrey 直線は、線形順序空間ではない。しかし、$X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$ に辞書式順序

$$(x, t) \leqq (x', t') \iff x < x' \text{ または } (x = x' \text{ かつ } t \leqq t')$$

を入れた線形順序空間を考えると、Sorgenfrey 直線は $\mathbb{R} \times \{1\}$ に X からの相対位相を入れたものと同相である。このように、線形順序空間の部分集合に、相対位相を入れて得られる位相空間を **GO 空間 (GO-space, Generalized Ordered space)**[*6]と呼ぶ。

定理 4.2 から、次を得る。

定理 4.3. GO 空間は継承的族正規である。 □

系 4.4. Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は継承的族正規である。 □

定理 1.1 (1) あるいは (2) から $\mathbb{S}$ は継承的正規であることが分かるが、上の結果はその精密化になっている。

Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は $\mathbb{R}$ の通常の順序に関しては線形順序空間にならないが、別の順序に関して線形順序空間にならないか疑問に思う人がいるかもしれない。実は、Sorgenfrey 直線はいかなる全順序についても線形順序空間とはならない。実際、線形順序空間については次の距離化定理が成り立つからである。

[*5] 「順序稠密」はここだけの用語である。Y が X で順序稠密であることは次の (1) (2) のどちらとも同値である：(1) $x, x' \in X$, $x < x'$ のとき、もし x と x' の間に X の元が存在すれば Y の元も存在し、そうでないときには $x, x' \in Y$ である。(2) 任意の $x \in X$ に対して、$S, T \subset Y$ が存在して $x = \sup S = \inf T$ となる。

[*6] GO-space は「ゴー・スペース」のように読むことが多いようである。

定理 4.5 (Lutzer [8])**.** 線形順序空間 X に対して、直積空間 $X \times X$ において対角集合 $\Delta = \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}$ が G_δ 集合であるならば、X は距離化可能である。

Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は距離化可能でない（系 1.2）が、$\Delta \subset \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ は G_δ 集合になる。上の定理によれば、このことは、$\mathbb{S}$ が線形順序空間になり得ないことを示している。

定理 4.5 を示す前に、少し用語を復習しておく。空間 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ と点 $x \in X$ に対して、$\mathcal{A}$ の x におけるスター $\mathrm{st}(x, \mathcal{A})$ を

$$\mathrm{st}(x, \mathcal{A}) = \bigcup \{A \in \mathcal{A} \mid x \in A\}$$

で定義する。正則空間 X が **Moore 空間**であるとは、X の開被覆の列 $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在して、各 $x \in X$ に対して $(\mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n))_{n=1}^{\infty}$ が x の基本近傍系をなすことをいう。

上の距離化定理 4.5 は、次の良く知られた Bing の距離化定理の帰結である（証明は [1, Theorem 4.4.8], [6, 定理 18.7] など）。

定理 4.6 (Bing)**.** 位相空間 X が距離化可能であるためには、X が族正規な Moore 空間であることが必要十分である。

定理 4.5 の証明. 線形順序空間 X に対して、$X \times X$ の開集合 $G_n\,(n \in \mathbb{N})$ が $\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ を満たすとする。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、X の開被覆 $\mathcal{G}_n$ を $\bigcup\{G \times G \mid G \in \mathcal{G}_n\} \subset G_n$ となるように選ぶ。さらに、$\mathcal{G}_n$ の元はすべて凸であり、$\mathcal{G}_{n+1}$ は $\mathcal{G}_n$ を細分するとしてよい。定義から、$x, y \in X,\, x \neq y$ ならばある n に対して $y \notin \mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n)$ となることに注意する。

X は定理 4.2 により族正規であるから、X が Moore 空間であることを示せば定理 4.6 により距離化可能性が分かる。開被覆の列 $(\mathcal{G}_n)_{n=1}^{\infty}$ が Moore 空間の定義の条件を満たすことを示そう。$x \in X$ とし、$a, b \in X \cup \{\pm\infty\}$ に対して $x \in (a,b)$ であるとする。$a, b \notin \mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n)$ となるように $n \in \mathbb{N}$ をとると、$\mathcal{G}_n$ の元が凸であることから、$\mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n) \subset (a,b)$ である。よって、X は Moore 空間である。 $\square$

GO 空間を調べるのには、線形順序空間によい埋め込みをもっていると都合がよいが、実は次のことが成り立つ。

定理 4.7. 任意の GO 空間は、あるコンパクトな線形順序空間に稠密な部分空間として埋め込まれる。

この定理の証明には「全順序集合の完備化」の操作を用いるので、まずそれについて述べておく[*7]。

定理 4.8. 任意の全順序集合 X に対して、完備な全順序集合 $\tilde{X}$ と順序を保つ単射 $i\colon X \to \tilde{X}$ の対 $(\tilde{X}, i)$ であって、$i(X)$ が $\tilde{X}$ において順序稠密となるものが存在する。さらに、$(\tilde{X}, i)$ は次の意味で一意的である：対 $(\tilde{X}', i')$ が同様の性質を満たすならば、順序同型 $\varphi\colon \tilde{X} \to \tilde{X}'$ で $\varphi \circ i = i'$ を満たすものが一意的に存在する。

[*7] この操作は $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ をつくる操作と似ているが、最大元と最小元が（元々存在しなければ）追加される点が違っている。$\mathbb{Q}$ にこの操作を適用した結果は数直線に正負の無限大を追加した $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ である。

上の定理で存在が保証された完備な全順序集合 $\tilde{X}$ を X の**完備化**という。

完備化の構成を述べるために記法を導入する。全順序集合 X の部分集合 A に対して、$u(A)$ を A の上界全体の集合、$l(A)$ を A の下界全体の集合とする。$l(u(A))$ を $lu(A)$ などと略記するとき、次のことがすぐに確かめられる。

(i) $A \subset B \subset X$ のとき $u(A) \supset u(B)$, $l(A) \supset l(B)$
(ii) $A \subset ul(A)$, $A \subset lu(A)$
(iii) $l(A) = lul(A)$, $u(A) = ulu(A)$
(iv) $A = lu(A) \iff$ ある $B \subset X$ に対して $A = lu(B)$

定理 4.8 の証明. まず、$\tilde{X}$ を

$$\tilde{X} = \{A \subset X \mid A = lu(A)\}$$

により定義し、$\tilde{X}$ を包含関係 $\subset$ について順序集合と見なす。$\tilde{X}$ の任意の元 A は定義により「$x \in A$, $y \leqq x$ ならば $y \in A$」を満たす。この事実から、$\tilde{X}$ は全順序集合であることが簡単に確かめられる。各 $x \in X$ に対して、$(-\infty, x] \in \tilde{X}$ であることがすぐに分かるので、$i \colon X \to \tilde{X}$ を $i(x) = (-\infty, x]$ によって定義できる。i はもちろん順序を保つ。

$\tilde{X}$ が完備であることを示すためには、命題 2.1 により、$\tilde{X}$ の任意の部分集合が上限をもつことをいえば十分である。そこで、$\mathcal{A} \subset \tilde{X}$ とする。$S = lu(\bigcup \mathcal{A})$ が $\mathcal{A}$ の上限を与えることを示そう。上の注意の (iv) により、$S \in \tilde{X}$ である。各 $A \in \mathcal{A}$ に対して $A \subset \bigcup \mathcal{A} \subset lu(\mathcal{A}) = S$ だから S は $\mathcal{A}$ の上界である。また、$S' \in \tilde{X}$ を $\mathcal{A}$ の任意の上界とすると、$\bigcup \mathcal{A} \subset S'$ であるから、$S = lu(\bigcup \mathcal{A}) \subset lu(S') = S'$ である。以上から、S は $\mathcal{A}$ の上限である。これで $\tilde{X}$ が完備であることが示された。

$i(X)$ が $\tilde{X}$ で順序稠密であることを示すため、$A, B \in \tilde{X}$, $A \subsetneqq B$ とする。2 つの場合に分けて考える。

（場合 1）$B \setminus A$ がただ一つの元 b からなる場合。このときは B は b を最大元にもつから $B = (-\infty, b] \in i(X)$ である。また、A にも最大元が存在する。実際、そうでなければ、$u(A) = [b, +\infty)$ であるから、$A = lu(A) = (-\infty, b]$ となり $b \notin A$ に反する。よって、A の最大元を a とすると $A = (-\infty, a] \in i(X)$ である。

（場合 2）$b_1, b_2 \in B \setminus A$ で $b_1 < b_2$ となるものが存在する場合。このときは $A \subset i(b_1) \subsetneqq i(b_2) \subset B$ である。

残る一意性の主張については、証明を省略する。 □

定理 4.7 の証明. X を GO 空間とし、X を部分空間にもつ線形順序空間 Y をとる。全順序集合としての Y の完備化 $\tilde{Y}$ を考えよう。$\tilde{Y}$ を順序位相により線形順序空間と考えると、$\tilde{Y}$ はコンパクトである。Y は $\tilde{Y}$ で順序稠密であるから、Y は $\tilde{Y}$ の部分空間であり、したがって X は $\tilde{Y}$ の部分空間である。

閉包 $\tilde{X} = \mathrm{Cl}\, X$ の $\tilde{Y}$ からの相対位相 τ を考えると、$(\tilde{X}, \tau)$ は X を稠密な部分空間にもつコンパクトな空間である。一方、$\tilde{X}$ を $\tilde{Y}$ の部分集合として全順序集合と考えれば、$\tilde{X}$ は線形順序空間としての位相 τ' をもつ。τ' はコンパクトな位相 τ よりも弱い Hausdorff な位相だから、$\tau = \tau'$ である。よって、$(\tilde{X}, \tau) = (\tilde{X}, \tau')$ が求めるコンパクトな線形順序空間である。 □

最後に、GO 空間の重要な特徴づけを述べておく。

定理 4.9. 位相空間 X に全順序 $\leqq$ が与えられているとき、次は同値である。

(1) X は GO 空間である。すなわち、ある線形順序空間 Y に対して順序を保つ位相的埋め込み $i\colon X \to Y$ が存在する。
(2) X の位相は $\leqq$ について凸な集合からなる開基をもつ。

証明. (1)⇒(2) は明らかである。
(2)⇒(1): (2) を仮定して、$\mathcal{C}$ を、X の凸集合からなる開基とする。Y を、次の条件で定まる $X \times \{-1, 0, 1\}$ の部分集合とする。

- $(x, 0)$ の形の点はすべて Y に属する。
- $(x, 1) \in Y \iff (-\infty, x]$ が X の開集合
- $(x, -1) \in Y \iff [x, +\infty)$ が X の開集合

Y には辞書式順序を入れ、それに関して線形順序空間とみなす。このとき、$i\colon X \to Y$ を $i(x) = (x, 0)$ で定めると、i は順序を保つが、i が X から Y への位相的埋め込みとなることを示そう。まず、$i(X)$ 上の Y からの相対位相は、Y における無限区間 $(-\infty, y)$, $(y, +\infty)\,(y \in Y)$ と $i(X)$ との共通部分の全体を準開基として生成されていることに注意する。この準開基 $\mathcal{S}$ は、X と $i(X)$ との自然な同一視のもとで、ちょうど

(i) $(-\infty, x), (x, +\infty)\,(x \in X)$ の形の無限区間すべて
(ii) $(-\infty, x], [x, +\infty)\,(x \in X)$ の形の無限区間のうち、X の開集合であるもの

からなる。ここで、区間はすべて X においてのものとする。この $\mathcal{S}$ が、X の位相の準開基でもあることを証明すればよい。

まず、(i)(ii) の形の集合が X の開集合であることを示す。(ii) については明らかであるから、(i) のうち $(-\infty, x)$ の形の区間について考える。$a \in (-\infty, x)$ とすると、$a \in C$, $x \notin C$ となるような X の凸開集合 $C \in \mathcal{C}$ が存在する。すると、凸性から $C \subset (-\infty, x)$ である。よって、$(-\infty, x)$ は X の開集合である。$(x, +\infty)$ もまったく同様に開集合となる。

次に、$\mathcal{S}$ が実際に X の位相を生成することを示すため、$C \in \mathcal{C}$ とし、$x \in C$ とする。$x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subset C$ となる有限個の $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ が存在することをいえばよい。

[場合 1] $a < x < b$ となる $a, b \in C$ が存在するとき。$(a, +\infty), (-\infty, b) \in \mathcal{S}$ で $(a, +\infty) \cap (-\infty, b) = (a, b) \subset C$ である。

[場合 2] $a < x$ となる $a \in C$ は存在するが、$x < b$ となる $b \in C$ は存在しないとき。$(-\infty, x] = C \cup (-\infty, x)$ となるから、$(-\infty, x]$ は X の開集合で、よって、$(-\infty, x] \in \mathcal{S}$ である。また $(a, +\infty) \in \mathcal{S}$ で、$(-\infty, x] \cap (a, +\infty) = (a, x] \subset C$ である。

[場合 3] $x < b$ となる $b \in C$ は存在するが、$a < x$ となる $a \in C$ は存在しないときは、場合 2 と同様。

[場合 4] $a < x$ となる $a \in C$ も、$x < b$ となる $b \in C$ も存在しないときは、場合 2, 3 と同様にして $(-\infty, x], [x, +\infty) \in \mathcal{S}$ が分かり、$(-\infty, x] \cap [x, +\infty) = \{x\} \subset C$ である。

以上で、$i\colon X \to Y$ が GO 空間 X から線形順序空間 Y への位相的埋め込みであるこ

とが示された。 □

この定理を使えば、Micheal 直線 $\mathbb{M}$ や、その Bernstein 集合 B を用いたバージョン $\mathbb{M}_B$ が GO 空間となることはすぐにわかる。よって、次が成り立つ。

系 4.10. Michael 直線 $\mathbb{M}$ および $\mathbb{M}_B$ は継承的族正規である。 □

5 最小の非可算順序数 ω_1

5.1 ω_1 の基本性質

以下では、順序数はそれよりも小さい順序数全体の集合であるとし、順序位相を入れ、線形順序空間であると考える。ある順序数 α を用いて $\alpha+1$ と表せる順序数を**後続順序数**と呼び、そうでない順序数を**極限順序数**と呼ぶのであった。

後続順序数 $\alpha+1=[0,\alpha]$ は全順序集合として完備であるから、コンパクト空間である。このことから、すべての順序数は局所コンパクト空間であり、とくに完全正則であることが分かる。実際には、それよりずっと強く継承的族正規である（定理 4.2）。最小の非可算順序数 ω_1 や、その次の順序数 ω_1+1 は位相空間論で特に重要な例である。

補題 5.1. ω_1 の任意の可算部分集合 A に対して、$\sup A \in \omega_1$ である。

証明. 一般に、順序数からなる集合 A の上限 $\sup A$ は集合族としての和集合 $\bigcup A$ に等しいのであった。いま、$A \subset \omega_1$ が可算であれば、各元 $\alpha \in A$ に対して $\alpha < \omega_1$ であるから α は可算順序数（順序数であって、集合として可算集合）である。よって、$\sup A = \bigcup A$ は可算集合の可算和として可算順序数なので、$\sup A < \omega_1$ つまり $\sup A \in \omega_1$ となる。 □

定理 5.2. 最小の非可算順序数 ω_1 は次の性質を満たす。

(1) ω_1 はリンデレフではない。
(2) ω_1 は第一可算である。
(3) ω_1 は点列コンパクトである。
(4) ω_1 上の実数値連続関数は、十分先では定数関数となる。すなわち、任意の連続関数 $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ に対して、ある $\alpha < \omega_1$ が存在して、任意の $\xi \geqq \alpha$ に対して $f(\xi)=f(\alpha)$ となる。
(5) ω_1 の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\omega_1$ について、$\beta\omega_1 = \omega_1+1$ である。
(6) ω_1 は継承的族正規である。
(7) ω_1 は完全正規でない。

証明. (1) $\mathcal{U} = \{[0,\xi) \mid \xi \in \omega_1\}$ は ω_1 の開被覆である。任意の可算部分集合 $A \subset \omega_1$ に対して $\alpha = \sup A$ は補題 5.1 により ω_1 に属すが、このとき $\alpha \notin \bigcup_{\xi\in A}[0,\xi)$ となる。よって、$\mathcal{U}$ は可算部分被覆をもたない。

(2) $\alpha \in \omega_1$ とすると、$\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\}$ は可算集合だから、$\{(\xi,\alpha] \mid \xi < \alpha\}$ は ω_1 の α

における可算な基本近傍系である。

(3) まず、各 $\alpha \in \omega_1$ に対して $[0,\alpha] \subset \omega_1$ は点列コンパクトである。実際、$[0,\alpha]$ は可算集合で、(2) より第一可算であるから、第二可算である。よって、$[0,\alpha]$ は距離化可能なコンパクト空間だから、点列コンパクトである。さて、$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を ω_1 内の点列とすると、補題 5.1 により、$\alpha_0 = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \omega_1$ である。$[0,\alpha_0]$ は点列コンパクトだから、(x_n) は $[0,\alpha_0]$ において、よって ω_1 において収束する部分列をもつ。

(4) $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。任意の正の整数 n に対して、$\alpha_n \in \omega_1$ であって $\alpha_n \leqq \xi < \omega_1$ ならば $|f(\xi) - f(\alpha_n)| < 1/n$ となるようなものが存在する。実際、そのような α_n が存在しなければ,ω_1 における増大列 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $|f(\xi_{n+1}) - f(\xi_n)| \geqq 1/n$ となるものを作ることができる。このとき $\xi_\infty = \sup\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \omega_1$ を考えると、f が ξ_∞ において連続でないことが容易にわかり、矛盾する。そこで、$\alpha = \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおけば、$\alpha \leqq \xi < \omega_1$ のとき任意の n に対して $|f(\xi) - f(\alpha)| \leqq |f(\xi) - f(\alpha_n)| + |f(\alpha) - f(\alpha_n)| < 1/n + 1/n = 2/n$ となるから、$f(\xi) = f(\alpha)$ である。

(5) (4) から明らかである。

(6) ω_1 は線形順序空間だから、これは定理 4.2 から分かる。

(7) ω_1 において、後続順序数は孤立点であるから、$L = \{\alpha \in \omega_1 \mid \alpha$ は極限順序数 $\}$ は ω_1 の閉集合である。ある連続関数 $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$ によって L が $f^{-1}(0) = L$ と表されたとすると、(4) により、ある $\alpha \in \omega_1$ が存在して、$\xi \geqq \alpha$ のとき $f(\xi) = f(\alpha)$ である。このとき、$\alpha + \omega \in L$ だから $f(\alpha) = f(\alpha + \omega) = 0$ である一方、$\alpha + 1 \notin L$ だから $f(\alpha) = f(\alpha + 1) \neq 0$ となるので矛盾する。よって、ω_1 の閉集合 L はゼロ集合（実数値連続関数の零点集合）とならないから、ω_1 は完全正規ではない。 □

系 5.3. ω_1 は次の性質を満たす。

(1) ω_1 は可算コンパクトであるが、コンパクトではない。
(2) ω_1 は継承的正規であるが、完全正規ではない。
(3) $\omega_1 + 1$ はコンパクトであるが、完全正規ではない。
(4) ω_1 のコンパクト化は同相を除いて一意的であり、それは 1 点コンパクト化である。 □

証明. (1) 定理 5.2 (1), (3) による。

(2) 定理 5.2 (6), (7) による。

(3) 定理 5.2 (7) および完全正規性が部分空間に継承されることによる。

(4) 定理 5.2 (5) により、$\omega_1 + 1$ は ω_1 の 1 点コンパクト化であると同時に Stone-Čech コンパクト化でもある。また、ω_1 の任意のコンパクト化に対して、$\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$ からの連続全射であって ω_1 上で恒等写像となるものが存在する。以上から主張が従う。 □

5.2 ω_1 の非パラコンパクト性をめぐって

さて、以下では次の定理をいくつかのアプローチで証明してみよう。

定理 5.4. ω_1 はパラコンパクトではない。

最初の方法は、ω_1 が可算コンパクトだがコンパクトではない（系 5.3 (1)）ことに注目し、次の事実を使うことである。

定理 5.5. パラコンパクトな可算コンパクト空間はコンパクトである。

これを証明するためには、次の簡単な補題を用意しておくと便利である。

補題 5.6. 位相空間 X が可算コンパクトであるためには、X の任意の閉離散部分集合（つまり、相対位相が離散位相であるような閉集合）が有限であることが必要十分である。

証明. 閉離散部分集合 $D \subset X$ で、無限集合であるものが存在するとする。必要なら D をその部分集合に取りかえ、$D = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ と表すことができる。このとき、$U_i = X \setminus (D \setminus \{x_i\}) \, (i \in \mathbb{N})$ とおけば、$\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ は X の可算開被覆であって、有限部分被覆をもたない。よって、X は可算コンパクトではない。

逆に X が可算コンパクトではないとすると、X の開被覆 $\{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ であって有限部分被覆をもたないものが存在する。このとき、$U_i \subsetneqq U_{i+1}$ が成り立つとしてよい。各 i に対して $x_i \in U_{i+1} \setminus U_i$ を選ぶと、$D = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ は X の閉離散部分集合だが、D は無限集合である。 □

定理 5.5 の証明. パラコンパクト空間 X が可算コンパクトであるとして、$\mathcal{U}$ を X の開被覆とする。$\mathcal{U}$ がある有限開被覆によって細分されることを示せば十分である。X はパラコンパクトなので、$\mathcal{U}$ を細分する局所有限開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在する。各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $x_\lambda \in V_\lambda$ を選び、$D = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とすると、D は X の閉離散部分集合となる。したがって、補題 5.6 により、D は有限であり、したがって、$\mathcal{V}$ も有限である。 □

ω_1 がパラコンパクトでないことのもう一つの証明を述べるために、いくつかの概念を導入しておく。ω_1 の部分集合 A が有界であるとは、上に有界であること、つまり $\alpha \in \omega_1$ が存在して任意の $\xi \in A$ に対して $\xi \leqq \alpha$ が成り立つことである。$S \subset \omega_1$ が**定常集合 (stationary set)** であるとは、ω_1 の任意の閉かつ非有界な ω_1 の部分集合 C に対して $S \cap C \neq \emptyset$ が成り立つことをいう。閉かつ非有界 (closed and unbounded) な集合は略して **club 集合**と言われる。ω_1 より小さい極限順序数の全体は、ω_1 の閉集合であって、確かに非有界であるから（定理 5.2 (7) の証明参照）、club 集合の例である。

可算個の club 集合の共通部分は、容易に分かるとおり club 集合である。この性質から、club 集合は確率空間での測度 1 の集合の類似と考えることができる。これをもとに考えれば、定常集合は任意の測度 1 の集合との交わりが空でない集合であるから、測度正の集合の類似といえる。

補題 5.7 (Fodor の補題, Pressing down lemma)**.** $S \subset \omega_1$ を定常集合とし、$f \colon S \to \omega_1$ は各 $\alpha \in S$ に対して $f(\alpha) < \alpha$ を満たす関数であるとする。このとき、$\beta \in \omega_1$ であって $f^{-1}(\{\beta\}) = \{\xi \in S \mid f(\xi) = \beta\}$ が定常集合となるものが存在する。

証明. 結論が成立しないとすれば、各 $\xi \in \omega_1$ に対して、club 集合 C_ξ であって $\alpha \in S \cap C_\xi$ ならば $f(\alpha) \neq \xi$ となるようなものが存在する。そこで、ω_1 の閉集合 C を

$$C = \bigcap_{\xi \in \omega_1} (C_\xi \cup [0, \xi]) = \{\alpha \in \omega_1 \mid \alpha \in \bigcap_{\xi < \alpha} C_\xi\}$$

で定義する。C は非有界でもある。実際、$\alpha \in \omega_1$ とすると、$\alpha_1 = \alpha$ として、$\alpha_{n+1} \in \bigcap_{\xi < \alpha_n} C_\xi$ となるように増大列 $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を取れる。$\alpha_\infty = \sup\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \omega_1$ とすると、$\alpha_\infty \geqq \alpha$ かつ $\alpha_\infty \in C$ である。よって、C は club 集合であるから、$\beta \in S \cap C$ が存在する。C の定義により、任意の $\xi < \beta$ に対して $\beta \in C_\xi$ であり、よって $f(\beta) \neq \xi$ である。これは $f(\beta) \geqq \beta$ を意味し、f についての仮定に反する。 $\square$

ω_1 がパラコンパクトでないことの証明に戻ろう。パラコンパクト空間とコンパクト空間の直積はパラコンパクトで、よって正規である。よって、次の命題のように、ω_1 があるコンパクト空間と直積して正規でないことを証明すれば、ω_1 がパラコンパクトでないことのもう一つの証明が得られたことになる。

命題 5.8. 直積空間 $X = \omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は正規でない。

証明. X の閉集合として、$A = \{(\alpha, \beta) \in X \mid \alpha = \beta\}, B = \omega_1 \times \{\omega_1\}$ を考える。U を、A の X における開近傍とする。$B \cap \mathrm{Cl}_X U \neq \emptyset$ を示せばよい。 $S \subset \omega_1$ を極限順序数の全体とすると、S は定常集合である。各 $\alpha \in S$ に対して、$f(\alpha) < \alpha$ となる $f(\alpha)$ を $[f(\alpha), \alpha] \times \{\alpha\} \subset U$ となるように選ぶと、Fodor の補題 5.7 により、$\beta \in \omega_1$ が存在して $T = f^{-1}(\{\beta\})$ が定常集合、とくに非有界になる。このとき、 $\{\beta\} \times T \subset U$ だから

$$(\beta, \omega_1) \in B \cap (\{\beta\} \times \mathrm{Cl}_{\omega_1 + 1} T) \subset B \cap \mathrm{Cl}_X U$$

となる。よって、X は正規でない。 $\square$

系 5.9. $(\omega_1 + 1)^2$ は継承的正規でないコンパクト空間である。

これと関連する有名な例として、Tychonoff の板 (Tychonoff plank) を簡単に紹介する。

例 5.10 (Tychonoff の板)**.** 直積空間 $T = (\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)$ を Tychnoff の板といい、$D = T \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$ を欠けた Tychonoff の板 (deleted Tychonoff plank) という。$A = \omega_1 \times \{\omega\}$, $B = \{\omega_1\} \times \omega$ は D の閉集合であり、$B \subset U$ となる D の任意の開集合 U が $\mathrm{Cl}_D U \cap A \neq \emptyset$ を満たすことが容易に証明できる。したがって、D は正規でない局所コンパクト空間、T は継承的正規でないコンパクト空間の例である。

実は、ω_1 はパラコンパクトよりもずっと弱い性質すら満たさない。

位相空間 X がメタコンパクト（メタリンデレフ）であるとは、X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ が、ある点有限（点有限）な開被覆で細分されることをいう。ここで、X の部分集合族 $\mathcal{V}$ が点有限（点可算）であるとは、$\{V \in \mathcal{V} \mid x \in V\}$ が有限（可算）であることをいう。パラコンパクト $\Rightarrow$ メタコンパクト $\Rightarrow$ メタリンデレフである。

定理 5.11. ω_1 はメタリンデレフではない。とくに、ω_1 はメタコンパクトでもパラコンパクトでもない。

証明. ω_1 の開被覆として $\mathcal{U} = \{[0,\alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$ を考える。$\mathcal{W}$ を $\mathcal{U}$ を細分する開被覆とするとき、$\mathcal{W}$ が点可算でないこと、つまり、ある $\beta \in \omega_1$ と非可算な $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ に対して $\beta \in \bigcap \mathcal{W}'$ となることを示せばよい。

ω_1 より小さい極限順序数の全体 S は定常集合である。各 $\alpha \in S$ に対して、$\alpha \in W_\alpha$ となる $W_\alpha \in \mathcal{W}$ を選び、さらに、$[f(\alpha), \alpha] \subset W_\alpha$, $f(\alpha) < \alpha$ となる $f(\alpha) \in \omega_1$ を選ぶ。ここで、W_α は有界な集合となることに注意する。

$f\colon S \to \omega_1$ に対して Fodor の補題 5.7 を用いると、$\beta \in \omega_1$ が存在して $S_0 = f^{-1}(\{\beta\})$ は定常集合であり、とくに非有界である。ここで $\mathcal{W}' = \{W_\alpha \mid \alpha \in S_0\} \subset \mathcal{W}$ について $\beta \in \bigcap \mathcal{W}'$ だが、$\mathcal{W}'$ は実際に非可算である。実際、$\mathcal{W}'$ が可算集合であれば、W_α が有界であることから $W = \bigcup_{\alpha \in S_0} W_\alpha$ はその可算和として有界だが、一方 $S_0 \subset W$ だから W は非有界でなければならず、矛盾する。 □

6 Katětov の定理

ここでは少し寄り道して、1948 年に Katětov [5] により証明された次の古典的な定理を紹介しよう。

定理 6.1 (Katětov)**.** コンパクト空間 X に対して $X^3 = X \times X \times X$ が継承的正規ならば、X は距離化可能である。

X^3 がたいへん目を引く不思議な外観をした定理であるが、いままでに現れた距離化可能でないコンパクト空間の例を調べて、実際に成り立っているかどうかを確かめてみよう。Katětov の定理によれば、距離化可能でないコンパクト空間 X に対しては、X^3 が正規でない部分空間をもつはずである。もちろん、そのためには X^2 が正規でない部分空間をもてば十分である。

- 二本矢の空間 $\mathbb{A}$ について。$\mathbb{A}$ は Sorgenfrey 直線と同相な部分空間 $\mathbb{S}_1 = (0,1) \times \{1\} \subset \mathbb{A}$ をもつ。$\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ の部分空間 $\mathbb{S}_1^2$ は定理 1.1 (4) により正規でない。
- 辞書式順序の正方形 $\mathbb{X}$ について。$\mathbb{X}$ は $\mathbb{A}$ を部分空間にもつから、$\mathbb{X}^2$ も正規でない部分空間 $\mathbb{S}_1^2$ をもつ。
- $\omega_1 + 1$ について。$(\omega_1 + 1)^2$ の部分空間 $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ は命題 5.8 により正規でない。

上の例ではすべて、X^2 に正規でない部分空間が見つかり、X^3 は必要ではなかった。実は、Katětov 自身も、定理 6.1 の X^3 は X^2 に改良できるのかという問題を提起している。

問題 6.2 (Katětov)**.** コンパクト空間 X に対して X^2 が継承的正規であるとき、X は距離化可能であるといえるか。

Katětov の問題の解決には長い年月を必要とした。1993 年、Gruenhage と Nyikos [2] により、Martin の公理と連続体仮説の否定 ($\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$) のもとで反例、つまり距離化可能でないコンパクト空間 X で X^2 が継承的正規であるものの例が構成された。また同じ論文で、連続体仮説 (CH) のもとでも反例が構成された。こうして、Katětov の問題に対する否定解の無矛盾性が証明された。さらに、2002 年には Larson と Todorčević [7] により、Katětov の問題に対する肯定解の無矛盾性も証明された。こうして、Katětov の問題は ZFC 上独立であるという形で解決をみたのである。

さて、以下では Katětov の定理を証明しよう。まず、基本的なのは次の考察である。

命題 6.3. 位相空間 X, Y に対して、$X \times Y$ が継承的正規であるとする。このとき、次の (a)(b) のうち、少なくとも一方が成立する。

(a) X は完全正規である。
(b) Y の任意の可算無限部分集合は閉集合である。

証明. (a)(b) のどちらも成立しないと仮定し、$X \times Y$ が継承的正規でないことを示す。このとき X は正規であるとしてよい。X は完全正規でないから、G_δ 集合ではない閉集合 $F \subset X$ が存在する。一方、Y の可算無限部分集合 $Q = \{q_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ で閉集合でないものが存在する。$q_\infty \in \mathrm{Cl}\, Q \setminus Q$ を一つ固定する。

このとき、$Z = (X \times Y) \setminus (F \times \{q_\infty\})$ が正規でないことを証明しよう。

$$A = F \times (Y \setminus \{q_\infty\}), \quad B = (X \setminus F) \times \{q_\infty\}$$

とおくと A, B は Z の閉集合である。Z の開集合 U, V に対して $A \subset U$, $B \subset V$ であるとき、$U \cap V \neq \emptyset$ を示そう。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$U_n = \{x \in X \,|(x, q_n) \in U\}$ とおくと、U_n は X の開集合で F を含む。よって、$F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ であるが、F は G_δ 集合ではないから、点 $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \setminus F$ が少なくとも一つ存在する。$(p, q_\infty) \in V$ で、V は Z の開集合だから、ある $n \in \mathbb{N}$ に対して $(p, q_n) \in V$ である。一方、$p \in U_n$ だから $(p, q_n) \in U$ である。したがって、$(p, q_n) \in U \cap V$ だから $U \cap V \neq \emptyset$ である。 □

無限個の点をもつコンパクト空間 Y に対しては、命題 6.3 の (b) は決して成立しないことに注意する。実際、Y には可算無限部分集合 C が存在するので、それを一つ固定しよう。C が閉集合でないなら、確かに (b) は成立しない。C が閉集合であれば、C は無限個の点をもちコンパクトだから離散空間ではない。よって、C には孤立点でない点 p が存在するが、このとき $C \setminus \{p\}$ は閉集合でない可算無限部分集合である。よって、いずれにしても (b) は成立しない。

この考察と命題 6.3 から、次を得る。

命題 6.4. 無限個の点をもつコンパクト空間 X, Y に対して、$X \times Y$ が継承的正規ならば、X, Y はともに完全正規である。 □

Katětov の定理の証明で、もう一つ重要なのは次の古典的な距離化定理である。

定理 6.5. コンパクト空間 X に対して、直積空間 $X \times X$ において対角集合 $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \,|\, x = y\}$ が G_δ 集合であるならば、X は距離化可能である。

証明. Urysohn の距離化定理により、X が第二可算であることを証明すればよい。Δ が X^2 の G_δ 集合であることと、X のコンパクト性により、X の有限開被覆の列 $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ であって、$G_n = \bigcup\{U^2 \,|\, U \in \mathcal{U}_n\}$ に対して $\Delta = \bigcap_{n=1}^\infty \mathrm{Cl}\, G_n$ となるようなものが存在する。このとき、$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{U}_n$ が X の開基であることを証明しよう。

V を $x \in X$ の開近傍とする。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$x \in U_n \in \mathcal{U}_n$ なる U_n を選ぶ。$(\mathrm{Cl}\, U_n)^2 \subset \mathrm{Cl}\, G_n$ だから、

$$(x,x) \in \left(\bigcap_{n=1}^\infty \mathrm{Cl}\, U_n\right)^2 = \bigcap_{n=1}^\infty (\mathrm{Cl}\, U_n)^2 \subset \Delta$$

となる。よって、$\bigcap_{n=1}^\infty \mathrm{Cl}\, U_n = \{x\} \subset V$ が成り立つ。したがって、X のコンパクト性から、ある n に対して $U_n \subset \mathrm{Cl}\, U_n \subset V$ である。 □

Katětov の定理 6.1 の証明. コンパクト空間 X に対して、$X^3 = X \times X \times X$ が継承的正規であるとする。もちろん、X は無限個の点からなるとしてよい。命題 6.4 により、$X \times X$ は完全正規である。したがって、その閉集合である対角集合 Δ は $X \times X$ の G_δ 集合であるから、定理 6.5 により X は距離化可能である。 □

7　可算性と GO 空間

さて、位相空間の可算性には、可分性、リンデレフ性など様々なものがある。GO 空間に対する可算性条件どうしの関係を見ておく。

位相空間 X が**可算鎖条件 (countable chain condition)** を満たす、あるいは簡単に c.c.c. であるとは、互いに交わりのない X の空でない開集合からなる族が、すべて可算であることをいう。いままでの例に現れた空間については、c.c.c. を満たすかどうかは簡単に調べられる。

- Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ は c.c.c. である。実際、$\mathbb{S}$ の任意の空でない開集合は $\mathbb{R}$ の開区間を含み、$\mathbb{R}$ は c.c.c. を満たすからである。
- 二本矢の空間 $\mathbb{A}$ も c.c.c. である。実際、$\mathbb{A}$ の空でない開集合は、1 点のみからなる $\{(0,0)\}$, $\{(1,1)\}$ の他は、すべて $[0,1] \times \{0\}$ 内の通常の順序についての開区間を含むからである。
- 辞書式順序をもつ正方形 $\mathbb{X}$ は、非可算個の互いに交わりのない開集合 $\{t\} \times (0,1)\,(t \in [0,1])$ をもつので、c.c.c. ではない。
- Michael 直線 $\mathbb{M}$ および $\mathbb{M}_B$ は、非可算個の孤立点をもつので c.c.c. ではない。
- ω_1 や $\omega_1 + 1$ も、非可算個の孤立点をもつので c.c.c. ではない。

また、次のことは簡単に証明できる。

- 第二可算な空間は、リンデレフかつ可分である。
- 第二可算性は部分空間に継承する。よって、第二可算な空間は継承的リンデレフかつ継承的可分となる。

- 可分な空間、および継承的リンデレフな空間は c.c.c. である。
- 距離空間において、第二可算性、リンデレフ性、可分性、c.c.c. およびその継承的なバージョンはすべて同値である。

以上のような可算性条件の間には、GO 空間の範囲内ではさらなる興味深い関係がある。

定理 7.1 (Lutzer-Benett [9]). GO 空間 X が c.c.c. を満たすためには、それが継承的リンデレフであることが必要十分である。

この定理の証明のため、次の補題を準備する。

補題 7.2. X を c.c.c. を満たす線形順序空間、$Y \subset X$ とし、$z \in Y$ とする。このとき、2 つの可算集合 $P \subset (-\infty, z] \cap Y$ および $Q \subset [z, +\infty) \cap Y$ が存在して、

$$Y \subset \bigcup_{p \in P, q \in Q} [p, q]$$

が成り立つ。

証明. $(-\infty, z]$ に含まれる互いに交わりのない X の開区間の族 $\mathcal{U}$ であって、各 $(a, b) \in \mathcal{U}$ に対して $a, b \in Y$ であるようなもの全体は、Zorn の補題により包含関係について極大元 $\{(y_\lambda, y'_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ をもつ。X は c.c.c. だから、Λ は可算である。$P' = \{y_\lambda, y'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおき、Y に最小元がないときは $P = P'$ とし、最小元 y_0 があるときは $P = P' \cup \{y_0\}$ とする。すると、$P \subset (-\infty, z] \cap Y$ であり、$Y \subset \bigcup_{p \in P} [p, +\infty)$ となる。まったく同様にして、可算集合 $Q \subset [z, +\infty) \cap Y$ をつくれば、$Y \subset \bigcup_{q \in Q} (-\infty, q]$ となる。P, Q は求める性質を満たす。 □

定理 7.1 の証明の前に次のことに注意しておく。位相空間が継承的リンデレフであることは、その任意の開集合がリンデレフになることと同値である。

定理 7.1 の証明. 定理 7.1 の前に注意した通り、一般的に継承的リンデレフ空間は c.c.c. となることが簡単に分かる。

そこで、X を c.c.c. な GO 空間とする。まず、X が線形順序空間である場合に証明する。$\mathcal{V}$ を X の開集合からなる族とし、$V = \bigcup \mathcal{V}$ とする。このとき、可算な $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ であって $\bigcup \mathcal{U} = V$ となるものが存在することを示せばよい。

まず、$x, y \in V$ に対して、x, y を両端とする閉区間が $\mathcal{V}$ のある可算部分族によって覆われるとき $x \sim y$ であるとすれば、$\sim$ は V 上の同値関係である。さらに、$\sim$ による $x \in V$ の同値類を $I(x)$ と書けば、$I(x)$ は開集合である。X は c.c.c. なので、ある可算集合 $C \subset V$ が存在して、$\sim$ による同値類の全体を $\{I(x) \mid x \in C\}$ と表すことができる。

さて、補題 7.2 によれば、各 $x \in C$ に対して、2 つの可算集合 $P(x) \subset (-\infty, x] \cap I(x)$ および $Q(x) \subset [x, +\infty) \cap I(x)$ を選び、

$$I(x) \subset \bigcup_{p \in P(x), q \in Q(x)} [p, q]$$

となるようにできる。ところが、$I(x)$ の定義から、$[p,x],[x,q]$ をそれぞれ覆うような $\mathcal{V}$ の可算部分族 $\mathcal{U}(x,p),\mathcal{U}(x,q)$ が存在する。$\mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{U}(x,r)\,|\,x\in C,\,r\in P(x)\cup Q(x)\}$ は $\bigcup\mathcal{U}=V$ を満たす $\mathcal{V}$ の可算部分族である。

最後に、X が一般的な GO 空間である場合を示す。定理 4.7 により、X はある線形順序空間 $\tilde{X}$ の稠密な部分空間となる。X は c.c.c. であるから、$\tilde{X}$ は c.c.c. である。よって、すでに示したことから、$\tilde{X}$ は継承的リンデレフである。したがって、X も継承的リンデレフである。 □

線形順序空間の可算性については、次のことも成り立つ。

定理 7.3 (Lutzer-Benett [9])**.** GO 空間に対して、可分性と継承的可分性は同値である。

これを示すには、定理 7.1 から分かる次の事実に注意する。

補題 7.4. 線形順序空間 X が c.c.c. を満たすならば、X の任意の（相対位相について）離散な部分空間は可算である。

証明. A を、c.c.c. を満たす線形順序空間 X の離散な部分空間とする。定理 7.1 により、A はリンデレフ離散空間であるから、A は可算集合でなければならない。 □

注意 7.5. この補題は、定理 4.2 を使っても分かる。実際、$A\subset X$ が離散であるとき $F=\mathrm{Cl}_X A\setminus A$ は X の閉集合となり、$X\setminus F$ において A は離散閉集合となる。$X\setminus F$ は定理 4.2 によって族正規だから、X の互いに交わらない開集合の族 $\{U_a\,|\,a\in A\}$ で $a\in U_a$ となるものが存在するが、X は c.c.c. を満たすので A は可算である。

定理 7.3 の証明. まず、線形順序空間の場合を考える。X を可分な線形順序空間と $A\subset X$ とする。A の可分性を証明しよう。A の孤立点全体の集合を A_0 とする。X は可分なので c.c.c. を満たすから、A_0 は補題 7.4 によって可算である。X の可算な稠密集合 D を取る。$\mathcal{D}$ を、X の開区間であって D の点を両端点にもち A と交わるもの全体の族とする。各開区間 $J\in\mathcal{D}$ に対して、$a_J\in A\cap J$ を選ぶ。

$E=A_0\cup\{a_J\,|\,J\in\mathcal{D}\}$ は A の可算部分集合である。E が A の稠密集合であることを示そう。$U\subset X$ を凸な開集合、$U\cap A\neq\emptyset$ とするとき $U\cap E\neq\emptyset$ を示せばよい。このとき $U\cap A$ が有限集合であれば、$\emptyset\neq U\cap A\subset A_0\subset E$ となるから、$U\cap E\neq\emptyset$ は成り立つ。そこで $U\cap A$ が無限集合であるとすると、相異なる $a,b,c\in U\cap A$ を $a<b<c$ となるように取れる。$U_1=U\cap(-\infty,b)$, $U_2=U\cap(b,+\infty)$ とおくと $a\in U_1$, $c\in U_2$ だから U_1,U_2 は X の空でない開集合である。よって、$d_1\in U_1\cap D$, $d_2\in U_2\cap D$ が存在する。$b\in(d_1,d_2)$ だから $J=(d_1,d_2)\in\mathcal{D}$ となり、したがって、$a_J\in J\subset U$ となる。よって、$U\cap E\neq\emptyset$ である。

最後に、X が一般的な GO 空間である場合を示す。定理 4.7 により、X はある線形順序空間 $\tilde{X}$ の稠密な部分空間となる。X は可分であるから、$\tilde{X}$ も可分である。よって、すでに示したことから、$\tilde{X}$ は継承的可分であるから X も継承的可分である。 □

可算性条件の間の関係が、GO 空間の場合にどのくらい単純化されるかをまとめておこう。まず、一般の位相空間について、この節の最初に挙げた可算性条件の間には次の図の

ような関係が成り立つのだった。

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{第二可算}} & \Rightarrow & \boxed{\text{継承的可分}} & \Rightarrow & \boxed{\text{可分}} \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \boxed{\text{継承的リンデレフ}} & \Rightarrow & \boxed{\text{継承的 c.c.c.}} & \Rightarrow & \boxed{\text{c.c.c.}} \\ \Downarrow & & & & \\ \boxed{\text{リンデレフ}} & & & & \end{array}$$

図 1　一般の空間での可算性条件の間の関係

図 1 において、$\Rightarrow$ で示されている以外に含意関係がないことを証明するには、次のような空間の例をすべて挙げることができればよい（このことは多少の作業によって分かる）。

(a) 継承的可分かつ継承的リンデレフだが、第二可算ではない。
(b) 継承的可分だが、リンデレフではない。
(c) 継承的リンデレフだが、可分ではない。
(d) c.c.c. だが、可分ではない。
(e) c.c.c. だが、継承的 c.c.c. ではない。
(f) リンデレフだが、c.c.c. ではない。

このうち (a) の例としては Sorgenfrey 直線 $\mathbb{S}$ を挙げることができる。(e) の例としては、$\mathbb{S}\times\mathbb{S}$ があり、(f) の例としては、辞書式順序をもつ正方形 $\mathbb{X}$ がある。(d) の例としては、2 点からなる離散空間 $\{0,1\}$ を十分多く直積したもの $\{0,1\}^\kappa$ を挙げることができる。ここで、κ は $\kappa > 2^{\aleph_0}$ を満たす基数とする。

(b) の性質をもつ空間は **S-space** と呼ばれ、(c) の性質をもつ空間は **L-space** と呼ばれる。正則でない Hausdorff な S-space や L-space は容易に構成できる。

- 濃度 ω_1 の集合 $X=\{x_\alpha \mid \alpha<\omega_1\}\subset\mathbb{R}$ を一つ固定し、x_α の基本近傍系を $B(x_\alpha,1/n)\cap\{x_\beta \mid \beta\leqq\alpha\}\,(n\in\mathbb{N})$ の形の集合全体として X の位相を定める。このとき、X は正則でない Hausdorff な S-space である。
- 集合として $Y=\mathbb{R}$ とし、Y の位相は、$\mathbb{R}$ の開集合から高々可算個の点を除いたものの全体を開基として定める。このとき、Y は正則でない Hausdorff な L-space である。

正則な S-space や L-space を構成する問題は、集合論的トポロジーの難問であった。まず、正則な S-space は、1973 年に CH のもとで Hajnal と Juhász [3] が構成したのち、1976 年がダイアモンド原理 ($\diamondsuit$) のもとで Ostaszewski [11] が構成した。また、同年の Juhasz, Kunen, Rudin による共著論文 [4] では Ostaszewski の構成をより易しくしたものが CH のもとで構成されている。一方、1981 年には Todorčević により、正則な S-space が存在しないことの無矛盾性が証明されている。こうして、正則な S-space の存在は ZFC 上独立な命題であることが分かっている。

正則な L-space についても、S-space のときと似た解答が得られるであろうと期待され、正則な L-space の存在と正則な S-space の存在は同値ではないかとさえ言われていた。しかし、それに反する形で、2006 年に Moore [10] は ZFC のもとで正則な L-space を構成することに成功した。こうして、S-space と L-space の問題は一応の決着をみた。

このような研究結果を踏まえれば、正則空間の範囲で考えるとき、図 1 においては $\Rightarrow$ で表示さ

れていない含意関係はいずれも成立しないか、少なくとも成立しないことの無矛盾性が示されている。また、Hausdorff 空間の範囲では、表示されていない含意関係は一つも成立しない完全な図であると言える。

図 1 に挙げた性質は、GO 空間の場合には次のように一直線に並ぶ。

$$\boxed{\text{第二可算}}$$
$$\scriptstyle(1)\displaystyle\Downarrow$$
$$\boxed{\text{継承的可分} \Leftrightarrow \text{可分}}$$
$$\scriptstyle(2)\displaystyle\Downarrow$$
$$\boxed{\text{継承的リンデレフ} \Leftrightarrow \text{継承的 c.c.c.} \Leftrightarrow \text{c.c.c.}}$$
$$\scriptstyle(3)\displaystyle\Downarrow$$
$$\boxed{\text{リンデレフ}}$$

図 2　GO 空間での可算性条件の間の関係

図 2 において、(1), (3) の逆は成立しない。二本矢の空間 $\mathbb{A}$ は可分だが第二可算でなく、辞書式順序の正方形 $\mathbb{X}$ はリンデレフだが c.c.c. でない。しかも、これらの例はともにコンパクトな線形順序空間になっている。

(2) の逆は成立するだろうか。線形順序空間について (2) の逆が成立すること、すなわち「c.c.c. を満たす線形順序空間は可分である」という主張は Suslin の仮説 (SH) として知られており、これは ZFC から独立な命題である。SH は一般の GO 空間について (2) の逆が成立すること、つまり「c.c.c. を満たす GO 空間は可分である」という命題と同値である。このことは定理 4.7 と定理 7.3 から簡単に確かめられる。

こうして、図 2 においては、すべての矢印は逆転できないか、あるいは逆転できないことの無矛盾性が示されていることになる。

参考文献

[1] R. Engelking, *General topology*, Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[2] G. Gruenhage and P.J. Nyikos, *Normality in X^2 for compact X*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), no. 2, 563–586.

[3] A. Hajnal and I. Juhász, *On first countable non-Lindelöf S-spaces*, Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. II. pp. 837–852. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[4] I. Juhász, K. Kunen and M.E. Rudin, *Two more hereditarily separable non-Lindelöf spaces*, Canad. J. Math. **28** (1976), no. 5, 998–1005.

[5] M. Katětov, *Complete normality of Cartesian products*, Fund. Math., **36** (1948), 271–274.

[6] 児玉之宏，永見啓応，『位相空間論』，岩波書店，1974.

[7] P. Larson and S. Todorcevic, *Katětov's problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 5, 1783–1791.

[8] D.J. Lutzer, *A metrization theorem for linearly orderable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 557–558.

[9] D.J. Lutzer and H.R. Bennett, *Separability, the countable chain condition and the Lindelöf property in linearly orderable spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **23** (1969), 664–667.

[10] J.T. Moore, *A solution to the L space problem*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 3, 717–736.

[11] A.J. Ostaszewski, *A perfectly normal countably compact scattered space which is not strongly zero-dimensional*, J. London Math. Soc. (2) **14** (1976), no. 1, 167–177.

[12] T.C. Przymusiński, *Normality and paracompactness in subsets of product spaces*, Fund. Math. **91** (1976), no. 3, 161–165.

[13] T.C. Przymusiński, *Normality and paracompactness in finite and countable Cartesian products*, Fund. Math. **105** (1979/80), no. 2, 87–104.