1 次元多様体の分類

yamyamtopo

概要

1 次元多様体の分類定理を証明する。すなわち、距離化可能性を仮定しない連結 1 次元多様体は、円周 $\mathbb{S}^1$，実数直線 $\mathbb{R}$，開いた長い半直線 $\mathbb{L}_+$，長い直線 $\mathbb{L}$ のいずれかと同相になることを証明する。

1　1 次元多様体

本稿では、位相空間 X, Y が同相であることを $X \approx Y$ で表す。また、位相空間が連結であることの定義には、空でないことを含める。

定義 1.1. n を非負の整数とする。位相空間 M が n **次元（位相）多様体**であるとは、M が Hausdorff 空間であり、かつ任意の $x \in M$ に対して、x の M の開近傍 U であって $U \approx \mathbb{R}^n$ となるものが存在することをいう。

この定義では、M の Hausdorff 性は仮定する一方、M の距離化可能性（すなわち、M がある距離空間と同相になること）は仮定していないことに注意する。また、「境界のある多様体」はここでは多様体に含めないことにする。

0 次元多様体とは離散空間のことにほかならない。以下では、主に 1 次元多様体を扱う。実数直線 $\mathbb{R}$ や円周 $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は 1 次元多様体の例である。また、$\mathbb{R}$ の任意の開集合は 1 次元多様体である。一般に、n 次元多様体の開集合は n 次元多様体となる。なお、空集合は、任意の $n \geqq 0$ に対して n 次元多様体である。

一般に多様体の各点は連結な開近傍をもつので、多様体の連結成分はすべて開集合である。したがって、多様体はその連結成分の直和に分解されるから、多様体の位相的分類のためには、連結多様体を分類すれば十分である。

$\mathbb{R}$ と $\mathbb{S}^1$ は連結な 1 次元多様体である。$\mathbb{R}$ はコンパクトでなく $\mathbb{S}^1$ はコンパクトであるから、$\mathbb{R}$ と $\mathbb{S}^1$ は同相でない。まず、次節では距離化可能な連結 1 次元多様体が $\mathbb{R}$ と $\mathbb{S}^1$ のどちらかと同相であることを証明しよう。

2　距離化可能な 1 次元多様体の分類

距離化可能性、あるいは（連結な多様体については）それと同値な条件は、多様体論のテキストの多くで仮定されている。そのような条件は、多くの文献では暗黙の仮定である。

しかし、次節で述べるとおり、距離化可能でない 1 次元多様体の例が存在する。したがって、距離化可能な 1 次元多様体の分類では、どこかで距離化可能性を使う必要があるが、これをそのままの形で使うのは不便である。そこで、次の定理を使う（ここでは証明を省略する)。

定理 2.1. M を連結な多様体とするとき、次は同値である。

(1) M は距離化可能である。
(2) M はパラコンパクトである。
(3) M は第二可算公理を満たす。 □

以下では、(3) の第二可算性（実際には、それから導かれる Lindelöf 性）の条件を主に使うことにする。(2) のパラコンパクト性は 1 の分割との関係もあり、多くの文献で採用されている。

次の補題が、1 次元多様体の分類の基本となる。

補題 2.2. M を 1 次元多様体とする。U, V はそれぞれ $\mathbb{R}$ と同相な M の開集合で、$M = U \cup V$ かつ $U \cap V \neq \emptyset$ であるとする。このとき、$M \approx \mathbb{R}$ または $M \approx \mathbb{S}^1$ である。

証明. 同相写像 $h\colon U \to \mathbb{R}$, $k\colon V \to \mathbb{R}$ を固定する。$J = h(U \cap V)$ とおけば、J は $\mathbb{R}$ の空でない開集合である。 J の各連結成分は開区間であるが、そのうち有界なものが存在する場合と、そうでない場合で場合分けする。

場合 1: $J = h(U \cap V)$ が有界な開区間を連結成分にもつ場合。そのような有界な開区間 $(a, b)\,(a, b \in \mathbb{R})$ を一つ選ぶ。$k \circ h^{-1}((a, b))$ は $\mathbb{R}$ の連結開集合なので、ある開区間と同相であるが、実際には $k \circ h^{-1}((a, b)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ であることを示そう。もし、そうでないとすると、$k \circ h^{-1}((a, b))$ は

$$(\alpha, \beta),\ (\alpha, +\infty),\ (-\infty, \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

のいずれかの形である。たとえば、$k \circ h^{-1}((a, b)) = (\alpha, \beta)$ と表されたとしよう。必要ならば k を取り換えて、同相写像 $\varphi = k \circ h^{-1} = k \circ h^{-1}|_{(a,b)}\colon (a, b) \to (\alpha, \beta)$ は単調増加であるとしてよい。さらに、φ は同相写像 $[a, b] \to [\alpha, \beta]$ に拡張できるが、これも再び記号 φ で表す。とくに、$\varphi(a) = \alpha$ である。さて、$x = h^{-1}(a)$, $y = k^{-1}(\alpha)$ とおく。M は Hausdorff 空間であるから、$x \in O, y \in O'$ であるような M の開集合 O, O' であって

$O\cap O'=\emptyset$ であるものが存在する。$h(O)$ は a の $\mathbb{R}$ における開近傍、$\varphi^{-1}(k(O')\cap[a,b])$ は a の $[a,b]$ における開近傍であるから、十分小さい $\varepsilon>0$ に対して、

$$a+\varepsilon\in h(O)\cap\varphi^{-1}(k(O')\cap[a,b])$$

である。よって、$h(a+\varepsilon)\in O\cap O'$ となり矛盾する。開区間 $k\circ h^{-1}((a,b))\subset\mathbb{R}$ が $(\alpha,+\infty)$ あるいは $(-\infty,\beta)$（ただし、$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$）の形である場合にも、端点 α あるいは β に着目して同様に矛盾が導かれる。

以上により、$k\circ h^{-1}((a,b))=\mathbb{R}$ である。よって、$V=k^{-1}(\mathbb{R})=h^{-1}((a,b))\subset U\cap V\subset V$ であるから $V\subset U$ であり、したがって $M=U\cup V=U\approx\mathbb{R}$ である。

場合 2: $J=h(U\cap V)$ が有界な開区間を連結成分にもたない場合。この場合は、さらに (2-1) $J=\mathbb{R}$ の場合、(2-2) $J=(-\infty,a)$ あるいは $J=(b,+\infty)$（ただし、$a,b\in\mathbb{R}$）の場合、(2-3) $J=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$（ただし、$-\infty<a\leqq b<+\infty$）の場合に分けられることが直ちにわかる。

(2-1) の場合。この場合は $h(U\cap V)=\mathbb{R}=h(U)$ であるから、$U\cap V=U$ なので $U\subset V$ となり、$M=U\cup V=V\approx\mathbb{R}$ である。

(2-2) の場合。必要ならば h を取り換えて、$J=(b,+\infty)$ の形であるとしてよい。さらに、k を取り換えれば、同相写像 $\varphi=k\circ h^{-1}\colon J=(b,+\infty)\to k(U\cap V)$ は単調増加であるとしてよい。$k(U\cap V)$ は開区間であるが、場合 1 のときと同様の議論によって、$k(U\cap V)$ は下に有界でないと分かる。実際、そうでないならば、$k(U\cap V)=(\alpha,\beta)\,(-\infty<\alpha<\beta\leqq+\infty)$ と表されるが、このとき φ は同相写像 $[b,+\infty)\to[\alpha,\beta)$ に拡張できる。これを用いて、$x=h^{-1}(b)(\in U)$ と $y=k^{-1}(\alpha)(\notin U)$ が M において交わらない近傍をもたず、M の Hausdorff 性に反することが場合 1 のときと同様に示される。 したがって、$k(U\cap V)=\mathbb{R}$ または $k(U\cap V)=(-\infty,\alpha)\,(\alpha\in\mathbb{R})$ の形であると分かる。前者の場合は $U\subset V$ であるから $M=V\approx\mathbb{R}$ である。後者の場合、同相写像 $\Phi\colon M=U\cup V\to\mathbb{R}$ を

$$\Phi(x)=\begin{cases}h(x)-b & x\in U\setminus V\text{ のとき}\\ 1-(h(x)+1)^{-1} & x\in U\cap V\text{ のとき}\\ k(x)-\alpha+1 & x\in V\setminus U\text{ のとき}\end{cases}$$

により定義できる。よって、$M\approx\mathbb{R}$ である。

(2-3) の場合。$k(U\cap V)$ は同相写像 $k\circ h^{-1}\colon J=h(U\cap V)\to k(U\cap V)$ によって $J=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ と同相となる。したがって、$k(U\cap V)$ は二個の交わりのない開区間の和集合であるが、その二個のうち一方でも有界であれば、U と V を入れかえて場合 1 の議論を適用することで $U\subset V$ が分かるので、$J=h(U\cap V)\approx U\cap V=U\approx\mathbb{R}$ となり矛盾する。よって、$k(U\cap V)=(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)$（ただし、$-\infty<\alpha\leqq\beta<+\infty$）の形であると分かる。$h$（および a,b）を適切に取り換えることで、同相写像

$$k\circ h^{-1}\colon(-\infty,a)\cup(b,+\infty)=h(U\cap V)\to k(U\cap V)=(-\infty,\alpha)\cup(\beta,+\infty)$$

は $(-\infty,a)$ を $(\beta,+\infty)$ に、$(b,+\infty)$ を $(-\infty,\alpha)$ にうつすものとしてよい。そこで、$k\circ h^{-1}$ の制限として得られる同相写像を $\varphi_1\colon(-\infty,a)\to(\beta,+\infty)$, $\varphi_2\colon(b,+\infty)\to(-\infty,\alpha)$ とする。このとき、φ_1,φ_2 はともに単調増加でなければならない。実際、φ_1 が単調減少ならば、φ_1 は同相写像 $(-\infty,a]\to[\beta,+\infty)$ に拡張できる。このことを用いて、$x=h^{-1}(a)(\in U)$ と $y=k^{-1}(\beta)(\notin U)$ は M において交わらない近傍をもたず、M の Hausdorff 性に反することが場合 1 のときと同様に証明できる。φ_2 が単調増加であることの証明もまったく同様である。以上のことにより、同相写像 $\Phi\colon M=U\cup V\to\mathbb{S}^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ を

$$\Phi(x)=\begin{cases} e(1-(h(x)-b+1)^{-1}) & x\in h^{-1}(b,+\infty)=k^{-1}(-\infty,\alpha)\text{ のとき}\\ e(1+k(x)-\alpha) & x\in V\setminus U=k^{-1}([\alpha,\beta])\text{ のとき}\\ e(2+\lambda-(k(x)-\beta+1)^{-1}) & x\in k^{-1}(\beta,+\infty)=h^{-1}(-\infty,a)\text{ のとき}\\ e(2+\lambda+h(x)-a) & x\in U\setminus V=h^{-1}([a,b])\text{ のとき}\end{cases}$$

により定義できる。ただし、$l=b-a$, $\lambda=\beta-\alpha$ とし、$e\colon\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ は $e(t)=(\cos(2+l+\lambda)^{-1}2\pi t,\sin(2+l+\lambda)^{-1}2\pi t)$ で定義される連続写像とする。よって、$M\approx\mathbb{S}^1$ である。 □

次の簡単な事実（1 次元の領域不変性定理）に注意しておく。

補題 2.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 U が $\mathbb{R}$ と同相であるならば、U は開区間であり、とくに、U は $\mathbb{R}$ の開集合である。 □

補題 2.4. M を連結 1 次元多様体とする。M が $\mathbb{S}^1$ と同相な部分集合を含むならば、$M\approx\mathbb{S}^1$ となる。

証明. C を、$\mathbb{S}^1$ と同相な M の部分集合とする。このとき、$C=M$ を示せばよい。M は Hausdorff 空間で、C はコンパクトであるから、C は M の閉集合である。一方、C は M の開集合である。これを示すため、$x\in C$ とする。$x\in U\subset M$, $U\approx\mathbb{R}$ となる M の開集合 U が存在する。$C\cap U$ は C の開集合で、$C\approx\mathbb{S}^1$ であるから、$x\in V\subset C\cap U$ となる V で、$V\approx\mathbb{R}$ となるものがある。これと $V\subset U\approx\mathbb{R}$ と補題 2.3 により V は U の開集合であり、したがって、M の開集合である。よって、V は $x\in V\subset C$ を満たす M の開集合となるから、C は M の開集合である。したがって、C は連結な空間 M の開かつ閉な空でない部分集合だから、$C=M$ である。 □

補題 2.5. J を開区間とし、J_1 を有界な開区間とする。任意の同相写像 $h\colon J\to J_1$ は、J_1 を含むある有界な開区間 J_2 に対して、同相写像 $\tilde{h}\colon\mathbb{R}\to J_2$ に拡張できる。

証明. $J\neq\mathbb{R}$ としてよい。また、$J_1=(-1,1)$ であるとして一般性を失わない。さらに、$J=(0,+\infty)$ または $J=(-1,1)$ であり、h は単調増加であるとしてよい。

$J=(0,+\infty)$ であるとき、$h\colon J=(0,\infty)\to(-1,1)=J_1$ は $h(0)=-1$ により同相写像 $h\colon[0,\infty)\to[-1,1)$ に拡張できる。さらに、この h は同相写像 $\tilde{h}\colon\mathbb{R}\to(-2,1)$ に、$t\leqq 0$ のとき $\tilde{h}(t)=-2-(t-1)^{-1}$ とおくことで拡張できる。$J=(-1,1)$ であるときも同様に証明できる。 □

補題 2.6. 位相空間 M の開集合の増大列 $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ で、各 n に対して $U_n\approx\mathbb{R}$ であり、かつ $M=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ であるものが存在すれば、$M\approx\mathbb{R}$ である。

証明. $J_1=(-1,1)\subset\mathbb{R}$ とおき、同相写像 $h_1\colon U_1\to J_1$ を一つ固定する。補題 2.5 により、$J_1\subset J_2$ となる有界な開区間が存在して、h_1 は同相写像 $h_2\colon U_2\to J_2$ に拡張できる。帰納的に、有界開区間の増大列 $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ と同相写像 $f_n\colon U_n\to J_n\,(n=1,2,\ldots)$ で、f_{n+1} が f_n の拡張であるものをつくることができる。すると、$J=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n$ は $\mathbb{R}$ の連結開集合であるから開区間となり、$\mathbb{R}$ と同相である。さらに、$f\colon M\to J$ を $f|_{U_n}=f_n$ により定義すると、この f は連続であり J への開写像となるので、同相写像である。よって、$M\approx J\approx\mathbb{R}$ である。 □

定理 2.7. M を距離化可能な連結 1 次元多様体とする。このとき、M は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{S}^1$ のどちらかと同相である。

証明. M は距離化可能な多様体だから、Lindelöf 空間である。よって、M の可算開被覆 $\mathcal{U}=\{U_i\,|\,n=1,2,\ldots\}$ であって、各 i に対して $U_i\approx\mathbb{R}$ であるようなものが存在する。

次に、M の開集合の増大列 $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ を次のように帰納的に定義する。$V_1=U_1$ とする。V_n まで定義できたとするとき、

$$V_{n+1}=V_n\cup\bigcup\{U_i\,|\,i\leqq n,\,U_i\cap V_n\neq\emptyset\}$$

とおく。これで帰納的な定義が完結した。さて、$V=\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$ とおくと、V は M の開集合である。一方、V は M の閉集合でもある。それを見るには、$\overline{V}\subset V$ を確かめればよい。そこで、$x\in\overline{V}$ とする。$\mathcal{U}$ は M の開被覆であるから、ある i に対して、$x\in U_i$ である。$U_i\cap V\neq\emptyset$ であるから、ある n に対して、$U_i\cap V_n\neq\emptyset$ であるが、必要なら n を大きくして、$i\leqq n$ であるとしてよい。すると、V_{n+1} の定義から $U_i\subset V_{n+1}$ となるので、$x\in V_{n+1}\subset V$ である。よって、$\overline{V}\subset V$ となる。以上から、V は連結な空間 M の空でない開かつ閉集合であるから、$V=M$ である。すなわち、$M=\bigcup_{n=1}V_n$ である。

定義を見ると、V_{n+1} は、V_n に開被覆 $\mathcal{U}$ の元を一個ずつ合併していくことで

$$V_n=V_{n,0}\subset V_{n,1}\subset\cdots\subset V_{n,j}\subset V_{n,j+1}\subset\cdots\subset V_{n,k_n}=V_{n+1}$$

という有限回のステップで構成されていると見ることができる。ただし、各 j に対して、$V_{n,j+1}$ は $V_{n,j+1}=V_{n,j}\cup U$ $(U\in\mathcal{U},\,V_{n,j}\cap U\neq\emptyset)$ と表すことができる。上の有限列を $n=1,2,\ldots$ にわたってつなぐことで、M の開集合の増大列 $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ であって次を満た

すものが得られる：$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$, $W_1 \approx \mathbb{R}$ かつ、各 n に対して $U \approx \mathbb{R}$ となる開集合 U が存在して $W_{n+1} = W_n \cup U$, $W_n \cap U \neq \emptyset$ となる。

このとき、補題 2.2 により、ある n に対して $W_n \approx \mathbb{S}^1$ となるか、すべての n に対して $W_n \approx \mathbb{R}$ となるかのどちらかである。前者の場合は、補題 2.4 により $M \approx \mathbb{S}^1$ である。他方、後者の場合は、補題 2.6 により、$M \approx \mathbb{R}$ である。 □

3 距離化可能でない 1 次元多様体：長い直線

定義 3.1. X を全順序集合とする。X に形式的に最大元 $+\infty$ と最小元 $-\infty$ を新たに付け加えた全順序集合 $X^* = X \cup \{-\infty, +\infty\}$ を考える。$a, b \in X^*$, $a < b$ のとき

$$(a, b) = \{x \in X^* \mid a < x < b\}$$

と定義する。(a, b) は X の部分集合となる。$\{(a, b) \mid a, b \in X^*, a < b\}$ で生成される X 上の位相を、X 上の**順序位相**という。

実数直線 $\mathbb{R}$ の通常の位相は、順序位相と一致する。$\mathbb{R}$ の開区間、閉区間、半開区間の $\mathbb{R}$ からの相対位相も、順序位相と一致する。しかし、一般に $A \subset \mathbb{R}$ に対して、A 上の $\mathbb{R}$ からの相対位相と、$\mathbb{R}$ からの制限で定まる A 上の順序に関する順序位相は一致しない。そのような例として、$A = [0, 1) \cup \{2\}$ が挙げられる。

以下では、順序数と超限帰納法についての初歩的な知識を仮定する（集合論の教科書を参照されたい）。ω_1 を、最小の非可算順序数とする。順序数は、それよりも小さな順序数の集合であると考える。したがって、ω_1 は、可算順序数全体の集合である。

定義 3.2. 直積集合 $\omega_1 \times [0, 1)$ 上に、辞書式順序を入れる。すなわち、$(\alpha, s), (\beta, t) \in \omega_1 \times [0, 1)$ に対して、$(\alpha, s) < (\beta, t)$ であることを

$$\alpha < \beta \quad \text{または} \quad \alpha = \beta \text{ かつ } s < t$$

と定義する。これにより $\omega_1 \times [0, 1)$ は全順序集合となる。$\omega_1 \times [0, 1)$ に順序位相を入れたものを**閉じた長い半直線**といい、$\mathbb{L}_{\geq 0}$ で表す。$\mathbb{L}_{\geq 0} \setminus \{(0, 0)\}$ に $\mathbb{L}$ からの相対位相を導入したものを**開いた長い半直線**といい、$\mathbb{L}_+$ と書く。

最後に、$\mathbb{L}$ を、集合としての直和 $\mathbb{L} = \mathbb{L}_+ \sqcup \mathbb{L}_{\geq 0}$ により定義して、その上の順序を「$\mathbb{L}_+$ を逆向きにして、その先に $\mathbb{L}_{\geq 0}$ を継ぎ足す」ことで定義する。つまり、$x, y \in \mathbb{L}, x \neq y$ のとき、$\mathbb{L}$ において $x < y$ であるとは、次の (i)–(iii) のいずれかが成り立つこととする。

(i) $x \in \mathbb{L}_+$, $y \in \mathbb{L}_{\geq 0}$ である。
(ii) $x, y \in \mathbb{L}_+$ であり、$\mathbb{L}_+$ において $y < x$ である。
(iii) $x, y \in \mathbb{L}_{\geq 0}$ であり、$\mathbb{L}_{\geq 0}$ において $x < y$ である。

これにより、$\mathbb{L}$ は全順序集合となる。$\mathbb{L}$ に順序位相を導入したものを**長い直線**という。

$\mathbb{L}_{\geq 0}$ を自然に $\mathbb{L} = \mathbb{L}_+ \sqcup \mathbb{L}_{\geq 0}$ の部分集合であると考えることで、$\mathbb{L}_{\geq 0} \subset \mathbb{L}$ とみなす。さらに、$\mathbb{L}_+ = \mathbb{L}_{\geq 0} \setminus \{0\}$ によって、包含関係の列 $\mathbb{L}_+ \subset \mathbb{L}_{\geq 0} \subset \mathbb{L}$ を得る。この包含関係において、左側にあるものの順序および位相は、右側にあるものから誘導されたものになっている。$\mathbb{L}$ は Hausdorff 空間であり、したがって、他の二つもそうである。

$\mathbb{L}$ の点を表すのに、次の表記を用いる。まず、$\mathbb{L}_{\geq 0}$ の点 $(\alpha, t)\,(\alpha \in \omega_1,\, t \in [0,1))$ を形式的な和として $\alpha + t$ と表す。とくに、$\alpha + 0 \in \mathbb{L}_{\geq 0}$ は α と表し、このことで自然に $\omega_1 \subset \mathbb{L}_{\geq 0}$ と考える。$\mathbb{L}_{\geq 0}$ の最小元である $(0,0)$ は 0 と表す。また、$\mathbb{L}$ の点で $\mathbb{L}_{\geq 0}$ に属していないものは、$\mathbb{L}_+$ の元 (α, t) と見なされるが、これは $\mathbb{L}$ の「負の元」と考えて $-\alpha - t$ と書く。$t = 0$ のときは $-\alpha$ と書く。

$x, y \in \mathbb{L}$ に対して、$[x, y]$, $[x, y)$ など区間を表すための記号は実数の場合と同様の意味で用いる。

命題 3.3. 任意の $x \in \mathbb{L}_+$ に対して、$[0, x]$ は単位閉区間 $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ と同相である。さらに、$[0, x]$ から $[0, 1]$ への同相写像としては順序を保つものが取れる。

証明. まず、$x = \alpha \in \omega_1$ の場合を、α についての（超限）帰納法で証明する。$\alpha = 1$ の場合は明らかである。また、$[0, \alpha] \approx [0, 1]$ であるとすると、順序を保つ同相写像（以下、簡単に順序同相写像と呼ぶ） $[0, \alpha] \to [0, 1/2]$, $[\alpha, \alpha + 1] \to [1/2, 1]$ があるので、これらを貼り合わせて、順序同相写像 $[0, \alpha + 1] \to [0, 1]$ を得る。

次に、λ を極限順序数 $(0 < \lambda < \omega_1)$ として、すべての $\alpha < \lambda$ に対して、$[0, \alpha] \approx [0, 1]$ であるとする。$\lambda \in \omega_1$ であるから λ より小さい順序数は可算個であり、したがって、$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \lambda,\ \sup_n \alpha_n = \lambda$ となる増大列 $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ が存在する。各 n に対して順序同相写像 $[0, \alpha_{n+1}] \to [0, 1]$ があり、$0 < \alpha_n < \alpha_{n+1}$ であることから、順序を保って

$$[\alpha_n, \alpha_{n+1}] \approx [0, 1] \approx [1 - (n+1)^{-1}, 1 - (n+2)^{-1}]$$

である。そこで、順序同相写像 $f_n \colon [\alpha_n, \alpha_{n+1}] \to [1 - (n+1)^{-1}, 1 - (n+2)^{-1}]$ を各 n について固定し、$f \colon [0, \alpha] \to [0, 1]$ を $f|_{[\alpha_n, \alpha_{n+1}]} = f_n,\ f(\lambda) = 1$ で定義すれば、f は順序同相写像である。

最後に、$x = \alpha + t, 0 < t < 1$ の形の場合は、順序同相写像 $[0, \alpha] \to [0, 1/2]$ と $[\alpha, \alpha + t] \to [1/2, 1]$ を貼り合わせて、順序同相写像 $[0, \alpha + t] \to [0, 1]$ を得る。 □

系 3.4. $x, y \in \mathbb{L},\, x < y$ のとき、$\mathbb{L}$ における閉区間 $[x, y]$ は $[0, 1]$ と同相であり、開区間 (x, y) は $\mathbb{R}$ と同相である。それぞれ、同相写像としては順序を保つものが取れる。 □

系 3.5. $\mathbb{L}, \mathbb{L}_+$ は連結 1 次元多様体である。 □

命題 3.6. $\mathbb{L}, \mathbb{L}_+$ は距離化可能でない。

証明. 距離化可能な連結多様体は第二可算公理を満たし（定理 2.1)、よって Lindelöf である。したがって、$\mathbb{L}, \mathbb{L}_+$ がどちらも Lindelöf でないことを示せばよい。それには、$\mathbb{L}$ の開被覆 $\{(-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \omega_1, \alpha > 0\}$ と $\mathbb{L}_+$ の開被覆 $\{(0, \alpha) \mid \alpha \in \omega_1, \alpha > 0\}$ がどちらも可算部分被覆をもたないことに注意すればよい。 □

一般に、順序数からなる集合 $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ は上限 $\sup_{i \in I} \alpha_i$ をもち、集合として $\sup_{i \in I} \alpha_i = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$ である。とくに、$\alpha_n \in \omega_1\,(n = 1, 2, \ldots)$ であれば、$\sup_n \alpha_n$ は可算集合の可算和として可算集合となり、よって、$\sup_n \alpha_n \in \omega_1$ が成り立つ。すなわち、ω_1 の可算個の元の上限は、再び ω_1 に属する。

命題 3.7. $\mathbb{L}$ は点列コンパクトであり、$\mathbb{L}_+$ は点列コンパクトでない。とくに、$\mathbb{L}$ と $\mathbb{L}_+$ は同相でない。

証明. $\mathbb{L}_+$ の点列 $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{L}_+$ において収束する部分列をもたない。よって、$\mathbb{L}_+$ は点列コンパクトでない。$\mathbb{L}$ が点列コンパクトであることを示すため、$\mathbb{L}$ の点列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ を任意に与える。各 n に対して、x_n はある $\alpha_n \in \omega_1$ と $t_n \in [0, 1)$ に対して $x_n = \alpha_n + t_n$ または $x_n = -\alpha_n - t_n$ と表される。$\alpha = \sup\{\alpha_n + 1 \mid n = 1, 2, \ldots\}$ とおくと、 $\alpha \in \omega_1$ であり、点列 (x_n) は区間 $[-\alpha, \alpha]$ に含まれる。系 3.4 により、$[-\alpha, \alpha]$ は $[0, 1]$ と同相であるから点列コンパクトであり、したがって (x_n) は収束部分列をもつ。よって、$\mathbb{L}$ は点列コンパクトである。 □

上の証明の中で、次が示されていることに注意しよう。

補題 3.8. 長い直線 $\mathbb{L}$ の任意の可算部分集合は、上界および下界をもつ。 □

以上で、連結な 1 次元多様体の例として $\mathbb{S}^1, \mathbb{R}, \mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ があり、どの二つも同相でないことが分かった。次の節で、任意の連結 1 次元多様体がこの 4 種類のどれかと同相であることを示そう。

4 一般の 1 次元多様体の分類

長い直線には、通常の実数直線と同様に次の性質がある。

補題 4.1. 長い直線 $\mathbb{L}$ の空でない部分集合 S に対して、S の上界が存在するならば、S は最小の上界、すなわち上限をもつ。また、S の下界が存在するならば、下限をもつ。とくに、$\mathbb{L}$ の任意の可算部分集合は、上限および下限をもつ。

証明. 空でない $S \subset \mathbb{L}$ が上界 $x_1 \in \mathbb{L}$ をもつとする。$x_0 \in S$ を一つ固定する。もし、$x_0 = x_1$ ならば、$S = \{x_0\}$ だから、x_0 が S の上限である。そこで、$x_0 < x_1$ とすると、系 3.4 により、順序を保つ同相写像 $[x_0, x_1] \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$ が存在する。したがって、実数

の連続性により、$S \cap [x_0, x_1]$ は $[x_0, x_1]$ において上限 x をもつ。直ちにわかるように、x は S の $\mathbb{L}$ における上限となっている。下限についての主張も同様である。最後の可算部分集合に関する主張は、いま示したことと補題 3.8 によって分かる。 □

補題 4.2. 長い直線 $\mathbb{L}$ の任意の連結開集合は、$\mathbb{R}, \mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ のいずれかと同相である。

証明. $U \subset \mathbb{L}$ を連結開集合とする。まず、U は次の性質を満たすことに注意する。

$$x, y \in \mathbb{L},\, x < y \implies (x, y) \subset U \tag{$\star$}$$

実際、そうでなければ、ある z に対して $x < z < y, z \notin U$ であるが、このとき $U = (U \cap (x, z)) \cup (U \cap (z, y))$ が空でない二つの開集合への分割を与え、U の連結性に反する。

もちろん、$U \neq \mathbb{L}$ としてよい。さらに、必要なら U を原点対称に反転することで、ある $x_0^*, x_0^{**} \in \mathbb{L}$ に対して、$x_0^* < x_0^{**}$, $x_0^* \notin U$, $x_0^{**} \in U$ であると仮定してよい（連結性には空でないことを含めていることに注意する）。このとき、性質 $(\star)$ により、x_0^* は U の下界を与える。したがって、補題 4.1 により、下限 $x_0 = \inf U$ が存在する。このとき、$x_0 \notin U$ である。実際、$x_0 \in U$ であるとすると、U が開集合であることにより、ある $x_0' < x_0$ に対して、$(x_0', x_0) \subset U$ でなければならない。しかし、(x_0', x_0) は $\mathbb{R}$ と同相であり、とくに元 $x_0'' \in (x_0', x_0)$ が存在するが、このとき $x_0'' \in U$ かつ $x_0'' < x_0$ となり x_0 が下界であることに反する。

以下では、$\mathbb{L}$ において U が上界をもつ場合と、もたない場合で場合分けする。U が上界をもつ場合は、補題 4.1 により、上限 $x_1 = \sup U$ が存在する。さきほどと同様の議論で、$x_1 \notin U$ が分かるから、U の性質 $(\star)$ により、$U = (x_0, x_1)$ である。したがって、$U \approx \mathbb{R}$ となる。U が上界をもたない場合は、やはり性質 $(\star)$ により、

$$U = \{x \in \mathbb{L} \,|\, x > x_0\}$$

となる。$x_0 = 0$ であるときは $U = \mathbb{L}_+$ だから、もちろん $U \approx \mathbb{L}_+$ となる。$x_0 > 0$ のとき、$x_0 < x_0'$ となる $x_0' \in \mathbb{L}$ と順序を保つ同相写像 $h_0\colon [x_0, x_0'] \to [0, x_0']$ を一つ固定すれば、同相写像 $h\colon U \to \mathbb{L}_+$ が

$$h(x) = \begin{cases} h_0(x) & x_0 < x \leqq x_0' \text{ のとき} \\ x & x \geqq x_0' \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられるので、$U \approx \mathbb{L}_+$ であることが分かる。$x_0 < 0$ の場合も、類似の方法で $U \approx \mathbb{L}_+$ が示される。 □

一般の 1 次元多様体の分類のため、さらに二つの補題を用意しよう。まず、最初の補題は、1 次元とも距離化可能とも限らない連結な多様体について成り立つ（実際には、連結かつ第一可算な空間について成り立つ）。

補題 4.3. M を連結 n 次元多様体とし、$(U_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ を M の開集合の（長さ ω_1 の）列であって、$M_0 \neq \emptyset$ であり、$\alpha < \beta$ のとき $\overline{U_\alpha} \subset U_\beta$ を満たすものとする。このとき、$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$ である。

証明. $M' = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$ とおけば、M' は M の空でない開集合である。あとは M' が M の閉集合であることを示せば、M の連結性から $M = M'$ であると分かる。そこで、$x \in \overline{M'}$ とする。M は n 次元多様体であるから、x は M において可算な基本近傍系 $(V_n)_{n=1}^\infty$ をもつ。各 n に対して、$V_n \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset$ となるような $\alpha_n < \omega_1$ を選ぶ。そこで、$\alpha = \sup_n \alpha_n$ とおけば、各 n に対して $V_n \cap U_\alpha \neq \emptyset$ であるから、$x \in \overline{U_\alpha} \subset U_{\alpha+1} \subset M'$ である。よって、$\overline{M'} \subset M$ であるから、M' は M の閉集合となる。 □

次の補題は、1 次元多様体に特有の性質を述べている。

補題 4.4. M を 1 次元多様体、U を $\mathbb{R}$ と同相な M の開集合とする。このとき、U の境界 $\operatorname{Bd} U = \overline{U} \setminus U$ は高々 2 点からなる。

証明. 同相写像 $h\colon \mathbb{R} \to U$ を固定し、$U_+ = h([0, +\infty)), U_- = h((-\infty, 0])$ とする。$\operatorname{Bd} U = (\operatorname{Bd} U_+ \cup \operatorname{Bd} U_+) \setminus \{h(0)\}$ であるから、$B_+ = \operatorname{Bd} U_+ \setminus \{h(0)\}, B_- = \operatorname{Bd} U_- \setminus \{h(0)\}$ がそれぞれ高々 1 点からなることを言えばよい。どちらも同様なので、B_+ が高々 1 点からなることを示そう。そのために、次の主張を示す。

主張. 任意の $x \in B_+$ と x の M における任意の開近傍 O に対して、$0 < a < +\infty$ となる a が存在して $h((a, +\infty)) \subset O$ が成り立つ。

主張を示すため、$x \in B_+$ とし、O を x の開近傍とする。必要なら O を小さく取りかえて、O は $\mathbb{R}$ と同相であり、$h(0) \notin O$ であるとしてよい。$O \setminus \{x\}$ は $\mathbb{R}$ と同相な二つの連結成分 O_1', O_2' をもち、$x \in \overline{U_+ \cap (O \setminus \{x\})} = \overline{U_+ \cap O_1'} \cup \overline{U_+ \cap O_2'}$ である。$x \in \overline{U_+ \cap O_i'}$ である i を選び、O_i' を O' と書く。もちろん、$x \in \overline{U_+ \cap O'}$ である。このとき、

$$O' \cap U_+ = O' \cap h((0, +\infty)) = O' \cap \overline{U_+}$$

であるから、$O' \cap U_+$ は O' の空でない開かつ閉集合である。よって、O' の連結性から $O' = O' \cap U_+$ であるので、$O' \subset U_+ = h((0, +\infty))$ である。したがって、ある $0 \leqq a < b \leqq +\infty$ に対して $O' = h((a, b))$ である。もし、$b < +\infty$ であるとすると、$O' \subset h([a, b])$ であるが、M は Hausdorff 空間であり $h([a, b])$ はコンパクトであるから、$h([a, b])$ は閉集合である。よって、$x \in \overline{O'} \subset h([a, b])$ であるが、一方、$x \notin h([a, b])$ であるから矛盾する。よって、$O' = h((a, +\infty))$ となるから、$h((a, +\infty)) \subset O' \subset O$ である。これで主張が証明された。

主張を用いて、B_+ が高々 1 点からなることを証明しよう。$x, y \in B_+$ かつ $x \neq y$ として矛盾を導く。M は Hausdorff 空間であるから、$x \in O_1$, $y \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

となる開集合 O_1, O_2 が存在する。しかし、主張によって、十分大きい $a > 0$ に対して $h((a, +\infty)) \subset O_1 \cap O_2$ となるので矛盾する。 $\square$

定理 4.5. 任意の連結 1 次元多様体は、$\mathbb{S}^1, \mathbb{R}, \mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ のいずれかと同相である。

証明. M を連結 1 次元多様体であり、M は $\mathbb{S}^1$ とは同相でないとする。M が $\mathbb{R}, \mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ のいずれかと同相であることを示そう。M の開被覆 $\mathcal{U}$ であって、各 $U \in \mathcal{U}$ に対して $U \approx \mathbb{R}$ であるようなものを固定する。M の開集合の列 $(V_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ で、次を満たすものを帰納的に構成しよう。

(i) 各 $\alpha \in \omega_1$ に対して $V_\alpha \approx \mathbb{R}$ である。
(ii) $\alpha < \beta$ のとき $\overline{V_\alpha} \subset V_\beta$ である。
(iii) $\lambda \in \omega_1$ が極限順序数のとき、$V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ である。

まず $U \in \mathcal{U}$ を一つ選んで、$V_0 = U$ とする。次に、V_α までが構成できたとしよう。(i) と補題 4.4 により、境界 $\mathrm{Bd}\, V_\alpha = \overline{V_\alpha} \setminus V_\alpha$ は高々 2 点からなる。したがって、$\mathrm{Bd}\, V_\alpha$ の各点 p に対して、$p \in U_p$ となる $U_p \in \mathcal{U}$ を選び、$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup \bigcup_{p \in \mathrm{Bd}\, V_\alpha} U_p$ とすれば、$\overline{V_\alpha} \subset V_{\alpha+1}$ である。さらに、補題 2.2 により $V_{\alpha+1} \approx \mathbb{R}$ または $V_{\alpha+1} \approx \mathbb{S}^1$ だが、後者の場合は補題 2.4 により $M \approx \mathbb{S}^1$ となり、最初に仮定したことに反する。よって、$V_{\alpha+1} \approx \mathbb{R}$ となる。次に、$\lambda \in \omega_1$ を極限順序数として、$\alpha < \lambda$ に対する V_α の構成が終わったとする。(iii) のとおりに $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ で V_λ を定義すると、各 $\alpha < \lambda$ に対して $\overline{V_\alpha} \subset V_{\alpha+1} \subset V_\lambda$ である。λ は可算順序数だから、$\lambda = \sup_n \alpha_n$ となる増大列 $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ が存在する。したがって、帰納法の仮定 (i) および補題 2.6 により、$V_\lambda = \bigcup_{n=1}^\infty V_{\alpha_n} \approx \mathbb{R}$ である。これで、帰納的構成が完了した。

補題 4.3 により、$M = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} V_\alpha$ である。次に、$\alpha < \omega_1$ に対して、$\mathbb{L}$ の開区間 $(x_\alpha, y_\alpha)\,(x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{L})$ および順序を保つ同相写像 $f_\alpha \colon V_\alpha \to (x_\alpha, y_\alpha)$ であって $\alpha < \beta$ のときに $f_\alpha = f_\beta|_{V_\alpha}$ となるものを、α について帰納的に構成する。まず、$(x_0, y_0) = (-1, 1)$ とし、順序を保つ同相写像 $f_0 \colon M_0 \to (x_0, y_0)$ を任意に一つ選ぶ。$f_\alpha \colon M_\alpha \to (x_\alpha, y_\alpha)$ まで構成されたとする。このとき、$x < x_\alpha < y_\alpha < y$ となるような $x, y \in \mathbb{L}$ を固定すると、順序を保つ同相写像 $h \colon (x, y) \to \mathbb{R}$ が存在し、このとき h によって (x_α, y_α) は有界な区間 $(h(x_\alpha), h(y_\alpha)) \subset \mathbb{R}$ に同相にうつされる。一方、同相写像 $V_{\alpha+1} \to \mathbb{R}$ が存在し、この同相写像によって V_α は $\mathbb{R}$ のある開区間に同相にうつされる。以上から、補題 2.5 を用いることで、f_α は (x, y) に含まれるある開区間 $(x_{\alpha+1}, y_{\alpha+1})$ に対して、同相写像 $f_{\alpha+1} \colon M_{\alpha+1} \to (x_{\alpha+1}, y_{\alpha+1})$ に拡張できることが分かる。次に、$\lambda \in \omega_1$ を極限順序数として、$\alpha < \lambda$ に対する f_α の構成が終わったとする。λ は可算順序数であるから、補題 4.1 により、$x_\lambda = \inf_{\alpha<\lambda} x_\alpha$ および $y_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} y_\alpha$ が存在する。すると、$(x_\lambda, y_\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} (x_\alpha, y_\alpha)$ であり、同相写像 $f_\lambda \colon V_\lambda \to (x_\lambda, y_\lambda)$ が $f_\lambda|_{V_\alpha} = f_\alpha$ で定義される。これで、帰納的構成が完了した。

$U = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} (x_\alpha, y_\alpha)$ とすると、同相写像 $f\colon M \to U$ が $f|_{V_\alpha} = f_\alpha$ により定義される。U は $\mathbb{L}$ の連結開集合であるから、補題 4.2 により、$\mathbb{R}, \mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ のいずれかと同相である。したがって、M は $\mathbb{R}, \mathbb{L}_+, \mathbb{L}$ のいずれかと同相である。 $\square$