局所コンパクト空間と exponentiability

yamyamtopo

位相空間 Y, Z に対して、Z^Y を Y から Z への連続写像全体の集合にコンパクト開位相を入れたものとする。Y のコンパクト集合 K と Z の開集合 W に対して、$[K, W] = \{f \in Z^Y \mid f(K) \subset W\}$ と書く。

命題 1. X, Y, Z を位相空間とし、Y は Hausdorff 空間であるとする。（連続とは限らない）写像 $f\colon X \to Z^Y$ に対して、写像 $\check{f}\colon X \times Y \to Z$ を $\check{f}(x, y) = f(x)(y)$ で定義する。このとき、次は同値である。

(1) f は連続である。
(2) 任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して、$\check{f}|_{X\times K}\colon X \times K \to Z$ は連続である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2): f を連続とする。$(x, y) \in X \times K$ とし、W を $\check{f}(x, y)$ の Z における開近傍とする。いま $f(x) \in Z^Y$ であるから、$f(x)$ は連続写像である。K はコンパクト Hausdorff であるので、x の K におけるコンパクト近傍 L を、$L \subset f(x)^{-1}(W)$ となるように取れる。これは $f(x) \in [L, W]$ を意味するから、f の連続性により、x の X における開近傍 U であって、$f(U) \subset [L, W]$ となるものが存在する。このとき $U \times L$ は (x, y) の $X \times K$ における近傍をなし、$\check{f}(U \times L) \subset W$ である。

(2) $\Rightarrow$ (1): (2) を仮定する。$x \in X$, K を Y のコンパクト集合、W を Z の開集合とし、$f(x) \in [K, W]$ とする。すなわち、$\check{f}(\{x\} \times K) \subset W$ とする。(2) により、$\check{f}|_{X\times K}$ は連続であるから、$O = \check{f}^{-1}(W) \cap (X \times K)$ は $\{x\} \times K$ を含む $X \times K$ の開集合となる。よって K のコンパクト性から、x のある開近傍 $V \subset X$ に対して $V \times K \subset O$ である。よって、$f(V) \subset [K, W]$ である。 □

系 2. 命題 1 の状況のもと、$\check{f}$ が連続ならば、f も連続である。したがって、写像

$$\Phi_{X,Y,Z}\colon Z^{X\times Y} \to (Z^X)^Y$$

が、$\check{f} \mapsto f$ によって定義される。この写像は（定義から明らかに）単射である。 □

定理 3. Hausdorff 空間 Y に対して、次は同値である。

(1) Y は局所コンパクトである。
(2) 任意の位相空間 X に対して、$X \times Y = \operatorname*{colim}_{K\subset Y:\text{compact}} (X \times K)$ である。
(3) 任意の位相空間 X, Z に対して、系 2 の写像 $\Phi_{X,Y,Z}$ は全単射である。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) は易しく、(2) $\Leftrightarrow$ (3) は命題 1 の言い換えである。そこで、(2) $\Rightarrow$ (1) のみを示そう。任意に $p \in Y$ を与える。このとき p が Y においてコンパクト近傍をもつことを示せばよい。

以下の議論は Michael [1] による。X として、次のような空間をとる：集合としては $X = Y$ とし、X の p 以外のすべての点は孤立点とし、p の開近傍系は $\{p\} \cup (Y \setminus K)$（ただし、$K$ は Y のコンパクト集合）の形の集合全体とする。

$X \times Y$ の部分集合 $S = \{(y, y) \,|\, y \in Y \setminus \{p\}\}$ を考える。この S が $X \times Y$ の閉集合であることを示そう。それを示すためには、(2) により、任意のコンパクト集合 K に対して $S \cap (X \times K)$ が $X \times K$ の閉集合となることを言えばよい。それを示すためには、各 $(x, y) \in X \times K$ に対して、$S \cap (X \times K)$ と交わらないような (x, y) の $X \times K$ における開近傍 U が取れればよい。$x \neq p$ の場合は、そのような U として $U = \{x\} \times (K \setminus \{x\})$ が取れるし、$x = p$ の場合でも $U = (\{p\} \cup (Y \setminus K)) \times K$ が取れる。

以上により、S は $X \times Y$ の閉集合であるから、とくに、(p, p) は S と交わらない近傍をもつ。すなわち、Y のあるコンパクト集合 K と p の Y におけるある近傍 V に対して、$(\{p\} \cup (Y \setminus K)) \times V$ は S と交わらない。これは $V \subset K$ を意味する。よって、p は Y においてコンパクト近傍 K をもつ。 $\square$

参考文献

[1] E. Michael, *Bi-quotient maps and Cartesian products of quotient maps.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** 1968 fasc. 2 287–302 vii (1969).