位相次元論の基礎

yamyamtopo

概要

位相空間に対しては次元を定義することができる。その方法は三通りのものがよく知られており、$\mathrm{ind}, \mathrm{Ind}$ という記号で表される二種類の帰納的次元と、$\dim$ で表される被覆次元がある。これらの次元は可分距離空間の範囲内では一致する。しかし、これら位相次元の理論について日本語で書かれた最近の入門的文献はほとんどないように思われる。そのことを踏まえて本稿では、もっとも古典的かつ基本的な可分距離空間の次元論を解説する。この解説を通してより多くの人に次元論にふれて頂ければ幸いである。

1 歴史的背景

まず、位相次元論が現れた歴史的背景についてごく簡単に説明する。位相次元論の歴史については多くの優れた書物があるので、興味のある読者は参照されたい。

1.1 次元の危機

次元の概念はもともと、点の位置を指定するのに必要なパラメータの個数として、漠然ととらえられていた。たとえば、平面上の点の位置を指定するのには、直交座標にしても、極座標にしても、 2 個のパラメータが必要となるので、平面の次元は 2 であるといった具合である。また、このパラメータの個数は、決してこれ以上減らすことができないことも素朴に信じられていたと思われる。しかし、19 世紀末の集合論の発展により、この信念にも、揺らぎが生じはじめた。1878 年に Cantor は直線 $\mathbb{R}$ と平面 $\mathbb{R}^2$ との間に点の一対一対応、すなわち全単射があることを証明した。これは、 2 次元であるはずの平面上のすべての点が、1 個の実数をパラメータとして表示されてしまうことを示していた。ここで与えられた対応は、もちろん連続ではなかったが、1890 年に Peano は単位閉区間 $I = [0, 1]$ から正方形 I^2 への連続な全射を構成してしまった。ただし、この全射は、単射ではなかった。つまり、区間 I 上を動くパラメータの異なった値に、正方形 I^2 上の同じ点が対応する場合があった。いずれにしても、次元の概念を、いままでのように自明のものと見なすわけにはいかなくなった。

1.2　帰納的次元

これに対して Poincaré は 1903 年と 1912 年の論文において、次元を定義するための一つのアイディアを提示した。そのアイディアは素朴であった。直線や曲線のような「1 次元」のものは、そこに点を一つとれば、左右二つの部分に切り離すことができる。曲面のような「2 次元」のものは、その上に「1 次元」のもの、つまり曲線をとれば、曲線の左側と右側に切り離すことができる。同様に「3 次元」のものは「2 次元」のもので切り離すことができる。以上のことを、逆に次元の定義にしようと Poincaré は提案した。つまり、ある図形が 1 次元であるとは、いくつかの互いに離れた点によって切り離されることであり、2 次元であるとは、（いま定義した意味での）1 次元の図形によって切り離されることであり、3 次元であるとは、2 次元の図形によって切り離されることである、と定義しようというのである。ちなみに Poincaré が次元の定義の構想を述べたこれらの論文は、興味深いことに哲学の雑誌において発表されている。

このような次元の帰納的な「定義」を厳密化する試みは、1913 年に Brouwer によって初めてなされた。Brouwer は自身が定義した次元を Dimensionsgrad と呼び、$\mathbb{R}^n$ の Dimensionsgrad が n であることを証明した。しかし、Brouwer はこの次元の概念をあまり深く追究しなかった。1911 年に Brouwer はユークリッド空間の次元の位相不変性、つまり「$n \neq m$ のとき $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ は同相でない」ことを証明していたが、Dimensionsgrad はこの事実の別証明を与えるためだけに用いられたようである。

次元論の本格的な研究に結び付いたのは、1922 年に Urysohn により、また 1923 年には Menger によりそれぞれ独立に定式化されたものである。これは後に、**小さな帰納的次元 (small inductive dimension)** と呼ばれることになった。おおまかには、その定義は次のようなものである。まず、空集合の次元は -1 であると定義する。次に「$n-1$ 次元以下」という概念が定義されているとして、空間が「n 次元以下」であることの定義は、その**任意の点**が、境界が $n-1$ 次元以下であるようないくらでも小さい開近傍をもつこととする。そして最後に、n 次元以下であるが $n-1$ 次元以下ではないとき、その空間は n 次元であると定義する。

上の定義における「任意の点」を、**任意の閉集合**に置き換えたものとして、**大きな帰納的次元 (large inductive dimension)** が定義される。これは Brouwer の Dimensionsgrad の定義に似ている。しかし、この次元概念が正式に定義され研究されたのは、1932 年の Čech の論文がはじまりである。

1.3　被覆次元

帰納的次元とはまったく異なったアイディアにより定義された次元の概念に、**被覆次元 (covering dimension)** がある。まず、次のような観察をしてみよう。平面を、小さなタイルで埋め尽くすことを考える。同じサイズの長方形のタイルを使っていちばん安直な方法で平面を埋め尽くしていけば、一か所に最大で 4 個のタイルが集まる。しかし、これをレンガを積むときのようにずらして置けば、一か所には 3 個のタイルしか集まらない。

そしてこの 3 個という数は、タイルの形や置き方をどんなに工夫しても、減らせそうにはないように思える。一般に n 次元のものを小さいブロックで埋め尽くすときには、少なくとも $n+1$ 個のブロックが一か所に集まらなければならないと期待できる。

これを精密に述べたものとして、1911 年に Lebesgue は、n 次元立方体 $I^n = [0,1]^n$ を十分小さい有限個の閉集合で被覆するとき、そのうち適当な $n+1$ 個を選ぶと共通の点をもつという主張を論文で発表した。この論文の証明には欠陥があったが、後に 1913 年に Brouwer が厳密な証明を与えている。

被覆次元のアイディアは、この定理を逆に次元の定義であると考えるというものである。正式に被覆次元が導入されて研究されたのは、再び Čech による 1933 年の論文がはじまりである。その後の研究では、被覆次元は二つの帰納的次元よりもより広い空間のクラスで良い性質をもつことが明らかになったため、単に位相次元と言ったときには被覆次元を意味することも多い。

1.4　帰納的次元と被覆次元との関係

現在では、空間 X の小さな帰納的次元を $\operatorname{ind} X$ で、大きな帰納的次元を $\operatorname{Ind} X$ で、被覆次元を $\dim X$ で表すのが普通である。そして X が可分距離空間の場合は、$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$ である。この事実は、$\operatorname{Ind} X$ や $\dim X$ が明示的に導入されるよりも早く、1927 年に Hurewicz によって証明されている。

第二次世界大戦後に、可分距離空間よりも広い空間のクラスでの次元論が追究された。1952 年に Katětov が、また 1954 年に森田紀一がそれぞれ独立に、可分とは限らない任意の距離空間 X に対して $\operatorname{Ind} X = \dim X$ であることを証明した。この範囲では $\operatorname{ind} X$ は良い性質をもたないし、他の二つと異なる（真に小さい）値を取り得る。本稿では議論を簡単にするため、可分距離空間の次元論を中心に紹介するが、距離空間の次元論でも、Ind あるいは dim を用いれば、可分な場合に成立していた定理の多くが成立することが分かっている。

2　次元の定義

本稿では、正則空間、正規空間は T_1 分離公理を満たすことを仮定する。位相空間 X の部分集合 A の閉包、内部、境界はそれぞれ $\operatorname{Cl}_X A, \operatorname{Int}_X A, \operatorname{Bd}_X A (= \operatorname{Cl}_X A \setminus \operatorname{Int}_X A$ で表し、これらは混乱のない限り $\operatorname{Cl} A$ などと略す。

定義 2.1. X を正則空間とする。-1 以上の整数 n に対して、$\operatorname{ind} X \leqq n$ であることを次によって帰納的に定義する。

(i) $\operatorname{ind} X \leqq -1$ であるとは、X が空集合であることをいう。
(ii) $0 \leqq n < \infty$ のとき $\operatorname{ind} X \leqq n$ であるとは、任意の $x \in X$ と x の任意の開近傍 U に対して、x の開近傍 V が存在して $V \subset U$ かつ $\operatorname{ind} \operatorname{Bd} V \leqq n-1$ が成立するこ

とをいう[*1]。

ここで X が正則であるという仮定は、上の (ii) での境界 $\mathrm{Bd}\,V$ を常に U に含まれるように取れるために置いたものであるが、論理的に必須なものではない。

問題 2.1. 整数 $n \geqq -1$ に対して、$\mathrm{ind}\,X \leqq n$ ならば $\mathrm{ind}\,X \leqq n+1$ である。

定義 2.2 (小さな帰納的次元)**.** X を正則空間とする。$\mathrm{ind}\,X \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ を次によって定義する。

(i) $\mathrm{ind}\,X \leqq n$ であるような整数 $n \geqq -1$ が存在するとき、その最小のものを $\mathrm{ind}\,X$ とする。
(ii) $\mathrm{ind}\,X \leqq n$ であるような整数 $n \geqq -1$ が存在しないとき、$\mathrm{ind}\,X = \infty$ とする。

$\mathrm{ind}\,X$ を X の**小さな帰納的次元 (small inductive dimension)** という。

問題 2.2. 問題 2.1 を用いて、整数 $n \geqq -1$ に対して、定義 2.1 の "$\mathrm{ind}\,X \leqq n$" が定義 2.2 と矛盾していないことを確かめよ。

問題 2.3. $\mathrm{ind}\,X = -1$ は X が空集合であることと同値である。また、空でない正則空間 X に対して、$\mathrm{ind}\,X = 0$ は X が開かつ閉集合からなる開基をもつことと同値である。

問題 2.4. 実数直線 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A に対して $\mathrm{ind}\,A \leqq 1$ であり、$\mathrm{ind}\,A = 0$ が成立するためには A が内点をもたないことが必要十分である。とくに、$\mathrm{ind}\,\mathbb{Q} = \mathrm{ind}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0,\ \mathrm{ind}\,\mathbb{R} = 1$ である。

問題 2.5. $\mathrm{ind} \leqq 0$ である正則空間全体のクラスは、部分空間をとる操作と任意個の直積をとる操作について閉じている。とくに、有限個の直積についても閉じているので、$\mathrm{ind}\,\mathbb{Q}^n = \mathrm{ind}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n = 0$ である。

小さな帰納的次元の定義は任意の点の近傍に着目したものであるが、これを任意の閉集合の近傍に置き換えることで、大きな帰納的次元の定義が得られる。

定義 2.3 (大きな帰納的次元)**.** X を正規空間とする。整数 $n \geqq -1$ に対して、$\mathrm{Ind}\,X \leqq n$ であることを次によって帰納的に定義する。

(i) $\mathrm{Ind}\,X \leqq -1$ であるとは、X が空集合であることをいう。
(ii) $0 \leqq n < \infty$ のとき $\mathrm{Ind}\,X \leqq n$ であるとは、X の任意の閉集合 F と F の任意の開近傍 U に対して、F の開近傍 V が存在して $V \subset U$ かつ $\mathrm{ind}\,\mathrm{Bd}\,V \leqq n-1$ が成立することをいう[*2]。

[*1] 正則空間の部分空間は正則空間であるから、ここでの $\mathrm{Bd}\,V$ は正則空間となり、$\mathrm{ind}\,\mathrm{Bd}\,V \leqq n-1$ であることが意味をもつ。

[*2] 正規空間の閉部分空間は正規空間であるから、ここでの $\mathrm{Bd}\,V$ は X の閉集合として正規空間となり、$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Bd}\,V \leqq n-1$ であることが意味をもつ。

問題 2.1 と同様に、$\operatorname{Ind} X \leqq n$ ならば $\operatorname{Ind} X \leqq n+1$ であることが証明される。そこで、$\operatorname{Ind} X \leqq n$ となる n が存在するときその最小値を $\operatorname{Ind} X$ と定義し、そのような n が存在しないときは $\operatorname{Ind} X = \infty$ と定義する。この $\operatorname{Ind} X \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ を X の**大きな帰納的次元 (large inductive dimension)** という。

再び、正規空間であるという仮定は、上での $\operatorname{Bd} V$ が U に含まれるように取れるために付けたものであるが、論理的に必須なものではない。

問題 2.6. $\operatorname{Ind} X = -1$ は X が空集合であることと同値である。また、空でない正規空間 X に対して $\operatorname{Ind} X = 0$ は、X の任意の二つの交わらない閉集合 A, B に対して $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$ なる二つの開（かつ閉）集合 U, V が存在することと同値である。

問題 2.6 のように定式化すると、$\operatorname{Ind} X = 0$ の定義は二つの閉集合 A, B について対称的な条件になっているから、何かと扱いが便利である。これは $\operatorname{ind} X$ にはない利点である。さて、次の命題は、「小さな」「大きな」という用語を正当化するものである。

命題 2.4. 正規空間 X に対して $\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{Ind} X$ である。

証明. $\operatorname{Ind} X = \infty$ であれば証明することは何もない。$\operatorname{Ind} X = n$ とし、$n < \infty$ の場合に n についての帰納法で証明しよう。$n = -1$ のときは明らかである。$n \geqq 0$ として、$n-1$ 以下で主張が成立するものとする。$x \in X$ とし、U を x の開近傍とする。$\{x\}$ は X の閉集合であるから、$\operatorname{Ind} X = n$ により x の開近傍 V であって $V \subset U$ かつ $\operatorname{Ind} \operatorname{Bd} V \leqq n-1$ となるものが存在する。ところが、帰納法の仮定より、$\operatorname{ind} \operatorname{Bd} V \leqq \operatorname{Ind} \operatorname{Bd} V$ となる。よって、$\operatorname{ind} \operatorname{Bd} V \leqq n-1$ である。これで $\operatorname{ind} X \leqq n$ が示され、帰納法が完結した。 □

しばらく用いることはないが、二つの帰納的次元に加えて、次の被覆次元 dim が非常に重要である。距離空間の範囲を超えて次元論を展開するときには、この被覆次元が最も適している。このためもあり、位相空間の次元といえば被覆次元を意味する場合も多い。ベクトル空間などと同じ次元の記号 dim をそのまま用いていることもその事情を反映している。

被覆次元の定義において重要となるのは、与えられた開被覆において開集合が最大で何重に重なっているかという個数である。そこで、次の用語を定義する。集合 X とその部分集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して、その**次数 (order)** $\operatorname{ord} \mathcal{A}$ を、共通部分が空でない $\mathcal{A}$ の元の個数の上限とする。ただし、無限濃度は区別せずに ∞ とする。すなわち

$$\operatorname{ord} \mathcal{A} = \sup \left\{ |\mathcal{B}| \;\middle|\; \emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{A}, \bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset \right\} \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$$

とする[*3]。ここで $|\mathcal{B}|$ は $\mathcal{B}$ の濃度であり、$\bigcap \mathcal{B}$ は $\mathcal{B}$ の元すべての共通部分である。さて、この準備のもと、被覆次元を定義しよう。

[*3] $\mathcal{A} = \emptyset$ または $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ の場合は、$\operatorname{ord} \mathcal{A} = 0$ とする。

定義 2.5 (被覆次元)**.** X を正規空間とする。-1 以上の整数 n に対して $\dim X \leqq n$ であることを、任意の有限開被覆 $\mathcal{U}$ に対して $\mathcal{U}$ を細分する有限開被覆 $\mathcal{V}$ が存在して $\operatorname{ord}\mathcal{V} \leqq n+1$ を満たすことと定義する。このとき、$\dim X \leqq n$ ならば $\dim X \leqq n+1$ となることは明らかである。

そこで、$\dim X \leqq n$ となる n が存在するときその最小値を $\dim X$ と定義し、そのような n が存在しないときは $\dim X = \infty$ と定義する。この $\dim X \in \{-1, 0, 1, 2, \ldots, \infty\}$ を X の**被覆次元 (covering dimension)** という。

問題 2.7. $\dim X = -1$ となるためには $X = \emptyset$ が必要十分である。

もちろんここでも、論理的には X を正規空間に限定する必要はない。この点に関して、開被覆に関する正規空間の重要な性質をひとつ思い出しておこう。正規空間 X の有限開被覆 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ に対しては、有限開被覆 $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ であって $\operatorname{Cl} V_i \subset U_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$ となるものが存在する。このような被覆 $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}$ の**収縮**と呼ぶ。特に $n = 2$ の場合を考えれば、任意の有限開被覆に対する収縮の存在は（T_1 分離公理のもとで）正規空間を特徴付けていることに注意しよう。ところで被覆の収縮は被覆次元の理論展開には基本的な道具であり、逆に正規空間の仮定だけから被覆次元の様々な重要な定理を証明できることも分かっている。このことから、正規空間のクラスは被覆次元の自然な定義域と考えられている。

以上の 三つの次元は、その定義から明らかに位相不変である。つまり、

定理 2.6. X と X' が同相な正則空間であるとき、$\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} X'$ である。また、X と X' が同相な正規空間であるとき、$\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} X'$, $\dim X = \dim X'$ である。 □

3　次元論の概観

本論に入る前に、目標をはっきりさせるため、我々が以後で証明することになる次元論の主な定理を述べておこう。まず、何を差し置いても重要なのは、通常「n 次元」であるとされている空間が、実際に三つの次元の定義のどれを用いても n 次元になるという事実である。

定理 3.1. n を非負整数とするとき、$\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n = n.$

これは次元の定義の最低限の正当性を示している。この三通りの次元の一致は、実際にはより広い範囲で成立する。

定理 3.2 (一致定理)**.** X を可分距離空間とするとき、$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X.$

この一致定理により、少なくとも可分距離空間の範囲では、次元の定義は非常によく確立されたものとみることができるだろう（もっとも、このような定義の妥当性を確かめるためには、ホモロジー論における Eilenberg-Steenrod の公理のように、次元を少数の公理によって特徴付けできるに越したことはない。しかし、そのような試みは、きわめて部

分的にしか成功していないのが現状である。)

さて、本稿では主に可分距離空間を扱うので、以下で述べる定理は主として ind について述べることにしよう。もちろん、一致定理によれば結果的には Ind や dim でもよいのだが、可分距離空間に関する限り、ind を用いると理論の展開が易しくなる(Ind を用いるのが自然な部分もある)。

(第二可算公理を満たす)任意の n 次元 C^∞ 多様体 M に対して、M を $\mathbb{R}^{2n+1}$ に埋め込むことができるのは有名な Whitney の埋め込み定理である。これと同様のことが、n 次元の可分距離空間についても成り立つ。すなわち、

定理 3.3 (埋め込み定理). n が非負整数、X が可分距離空間のとき、 $\operatorname{ind} X \leqq n$ ならば、X は $\mathbb{R}^{2n+1}$ のある部分空間と同相である。

次の事実は基本的であり、証明もさほど難しくない。

定理 3.4 (部分空間定理). X を可分距離空間、$A \subset X$ をその部分空間とすると、$\operatorname{ind} A \leqq \operatorname{ind} X$ である。

実際に与えられた空間の次元を計算するには、次元の和集合や積についてのふるまいを知ることが重要である。そこで、次の可算和定理と積定理が重要である。

定理 3.5 (可算和定理). X を可分距離空間、n を非負整数とする。X が閉集合 $F_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ の和集合で表されているとき、すべての i に対して $\operatorname{ind} F_i \leqq n$ であれば $\operatorname{ind} X \leqq n$ である。

この定理は、閉集合の可算和によって次元は増大しないことを述べている。F_i たちの中には同じものが何度現れてもよいから、もちろん上の定理は有限和の場合を含む。

問題 3.1. 定理 3.5 は F_i が閉集合でないと成り立たないし、閉集合の非可算和についても成り立たない。これを反例を挙げることによって示せ。

問題 3.2. 定理 3.1, 3.4 と定理 3.5 を用いて、第二可算公理を満たす空でない n 次元位相多様体 M に対して $\operatorname{ind} M = n$ を証明せよ。

さて、直積の形をした空間の次元を評価するには、次の定理を用いることができる。

定理 3.6 (積定理). X, Y を同時には空でない可分距離空間とするとき、$\operatorname{ind}(X \times Y) \leqq \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y$ である。

もちろん、ここでの $X \times Y$ は可分距離空間である。一目見たところでは、等式 $\operatorname{ind}(X \times Y) = \operatorname{ind} X + \operatorname{ind} Y$ が成り立つのが自然であり、実際、多様体の次元などはそのようになっている。ここでの等号が成立しない例は、第 5 節で挙げることにする。

さて、以下の分解定理と加法定理は、すぐにはその重要性には気づきにくいが、n 次元空間の研究を 0 次元空間の研究に帰着させる働きを持っている。

定理 3.7 (分解定理). X を可分距離空間、n を非負整数とし、$\operatorname{ind} X \leqq n$ とする。この

とき、

(i) X の部分空間 Y, Z であって $X = Y \cup Z$ かつ $\mathrm{ind}\, Y \leqq n-1$, $\mathrm{ind}\, Z \leqq 0$ となるものが存在する。

(ii) X の $n+1$ 個の部分空間 $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ であって $X = Z_0 \cup Z_1 \cup \ldots \cup Z_n$ かつ $\mathrm{ind}\, Z_i \leqq 0\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ となるものが存在する。

分解定理の (ii) は、(i) を繰り返し用いることで得られることに注意しておく。また、n 次元の空間の分解には、n 個ではなく $n+1$ 個の 0 次元空間が必要なことを注意しておこう。この分解で保存されている量は次元というよりもそれに 1 を加えた数である。これは n 次元単体には $n+1$ 個の頂点があることと符合している。この事情は次の加法定理でも同様である。

定理 3.8 (**加法定理**)**.** X を可分距離空間、$Y_1, Y_2 \subset X$ を部分空間、$X = Y_1 \cup Y_2$ とするとき、$\mathrm{ind}\, X \leqq \mathrm{ind}\, Y_1 + \mathrm{ind}\, Y_2 + 1$ である。

ここで、Y_1, Y_2 がともに X の閉集合である場合は、可算和定理（定理 3.5）が適用できるから、より良い評価 $\mathrm{ind}\, X \leqq \max\{\mathrm{ind}\, Y_1, \mathrm{ind}\, Y_2\}$ が得られる。

問題 3.3. 定理 3.8 において、Y_1 も Y_2 も空でなく、しかも等号が成立するような X, Y_1, Y_2 の例を挙げよ。

4　0 次元空間

小さな帰納的次元 ind の定義からもわかるように、ind についての主張を証明するには帰納法を用いるのが自然である。それには n 次元のものを分解定理で $n-1$ 次元と 0 次元の和に表しておいてから、加法定理で n 次元に組み立て直すという論法が有効である。ここでの加法定理の証明のために、0 次元空間についての予備的考察を行う。

多様体の範囲内では 0 次元空間は離散空間に限るので、0 次元というと「ポツポツと」点がある様子をイメージする人も多いかもしれない。しかし、有理数空間 $\mathbb{Q}$ や無理数空間 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$、カントール集合などは、孤立点はないが、$\mathrm{ind} = 0$ となる。0 次元空間についての議論はこのような離散でない空間を念頭に置いた方が理解しやすい。

定理 4.1 (**0 次元分離定理 I**)**.** 可分距離空間 X が $\mathrm{ind}\, X \leqq 0$ をみたすとする。このとき、X の閉集合 A, B に対して $A \cap B = \emptyset$ ならば、$A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V = X$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となる X の開（あるいは閉）集合 U, V が存在する。

証明. まず、X は可分距離空間なので、次の性質をもつということを思い出しておこう :「X の任意の開被覆は、可算部分被覆をもつ」。この性質をもつ空間を Lindelöf 空間というのであった。さて、$\mathrm{ind}\, X \leqq 0$ であるから問題 2.3 により、各点 $x \in X$ に対してその開かつ閉な近傍 V_x を、A と B の少なくとも一方とは交わらないように選ぶことができる。X は Lindelöf 空間であったから、開被覆 $\{V_x \,|\, x \in X\}$ は可算部分被覆

$\{V_i \,|\, i=1,2,\ldots\}$ をもつ。これに対して $U_1 = V_1$ および $U_i = V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j \ (i \geqq 2)$ と定義すれば、$\{U_i \,|\, i=1,2,\ldots\}$ は X の互いに交わらない開かつ閉集合からなる X の被覆である。しかも $U_i \subset V_i$ であるから、U_i は A と B の少なくとも一方とは交わらない。そこで、$U = \bigcup\{U_i \,|\, U_i \cap A \neq \emptyset\}$, $V = \bigcup\{U_i \,|\, U_i \cap A = \emptyset\}$ とおくと、U, V は必要な性質を満たしている。 □

定理 4.1、問題 2.6 と命題 2.4 から、直ちに次の系が得られる。

系 4.2. 可分距離空間 X に対して、$\operatorname{ind} X = 0$ と $\operatorname{Ind} X = 0$ は同値である。

注意 4.3. 定理 4.1 の証明で X について必要なことは X が Lindelöf 空間であることだけだったので、定理 4.1 と系 4.2 は、正則 Lindelöf 空間についてもそのまま成立する。ここで、正則 Lindelöf 空間は正規であり[*4]、したがって $\operatorname{Ind} X$ は定義されることに注意する。

一般に位相空間 X の部分集合 A, B に対して $A \cap B = \emptyset$ であるとき、X の閉集合 L が A と B を分ける（X における）**壁**であることを

$$X \setminus L = U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset, \quad A \subset U, \quad B \subset V$$

を満たすような X の開集合 U, V が存在することと定義しよう。さて、次の目標は、さきほどの定理 4.1 を用いて、更に一般的な次の定理を示すことである。

定理 4.4 (0 次元分離定理 II). X を可分距離空間、A, B を X の閉集合とし、$A \cap B = \emptyset$ とする。$Z \subset X$ が $\operatorname{ind} Z \leqq 0$ を満たせば、A と B を分ける壁 L であって、$L \cap Z = \emptyset$ となるものが存在する。

$X = Z$ の場合を考えれば分かる通り、これは確かに定理 4.1 の一般化である。しかし、この定理の重要性は、次の節で加法定理を証明するときにはじめて明らかになる。

この定理の証明のためには、閉集合などとは限らない一般の部分集合 Z を扱うための手法がどうしても必要である。そこで多少、位相空間の一般論に寄り道をする。まず、次の定義をしよう。

定義 4.5. X を位相空間、A, B をその部分集合とする。このとき A と B が**分離されている (separated)** とは、$(\operatorname{Cl} A) \cap B = A \cap (\operatorname{Cl} B) = \emptyset$ が成り立つことをいう。

A, B が分離されているとは、A と B が交わらず、かつ A と B がそれぞれ $A \cup B$ の閉集合（かつ開集合）となることにほかならない。したがって、位相空間 X の部分集合

[*4] 実際、X が正則な Lindelöf 空間で A, B が X の閉集合で $A \cap B = \emptyset$ であるとする。このとき、二つの可算な開集合族 $\{U_i \,|\, i=1,2,\ldots\}$, $\{V_i \,|\, i=1,2,\ldots\}$ を、$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ かつ 各 i に対して $\operatorname{Cl} U_i \cap B = \operatorname{Cl} V_i \cap A = \emptyset$ となるように取ることができる。このとき $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} \operatorname{Cl} V_j))$, $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} (V_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} \operatorname{Cl} U_j))$ とおけば、$A \subset U$, $B \subset V$ であり、$U \cap V = \emptyset$ となることが確かめられる。

が連結でないことは、分離されている二つの空でない集合の和集合に表されることと同値である。

さて、正規空間の部分空間は一般には正規とはならないが、「すべての部分空間が正規である」という性質は、次の命題から分かる通り、分離されている集合に対する「分離公理」の成立と同値になる。

命題 4.6. 位相空間 X に対して、次は同値である。

(1) X の任意の部分空間は正規である。
(2) X の任意の開部分空間は正規である。
(3) X の任意の分離されている部分集合 A, B に対して、$A \subset U,\ B \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ なる開集合 U, V が存在する。

証明. (1) $\Rightarrow$ (2) : 明らかである。

(2) $\Rightarrow$ (3) : X の任意の開部分空間が正規であるとし、$A, B \subset X$ が分離されているとする。このとき $Y = X \setminus (\operatorname{Cl}_X A \cap \operatorname{Cl}_X B)$ とおけば、Y は X の開部分空間だから正規であり、$\operatorname{Cl}_Y A \cap \operatorname{Cl}_Y B = \emptyset$ となる。よって、Y の開集合 U, V であって $\operatorname{Cl}_Y A \subset U$, $\operatorname{Cl}_Y B \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する。このとき U, V は X の開集合でもあるから U, V は求めるものである。

(3) $\Rightarrow$ (1) : まず (3) を仮定し、$Y \subset X$ を部分集合、A, B を $A \cap B = \emptyset$ なる Y の閉集合とする。すると A, B は X の部分集合としては分離されているから $A \subset U,\ B \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ となるような X の開集合 U, V が存在する。 □

上の命題の同値な条件を満たし、かつ T_1 分離公理を満たす空間を**継承的正規空間 (hereditarily normal space)** という。また、（T_1 分離公理を満たすとは限らない）位相空間が上の同値な条件を満たすことを、**$\mathbf{T_5}$ 分離公理**を満たすという。距離空間は継承的正規空間であるから、次の系が成り立つ。

系 4.7. 距離空間 X の任意の分離されている部分集合 A, B に対して、$A \subset U, B \subset V$ かつ $U \cap V = \emptyset$ なる開集合 U, V が存在する。

さて、位相空間の一般論から定理 4.4 の証明に戻ろう。

定理 4.4 の証明. まず X の正規性を二回用いると、$A \subset U,\ B \subset V,\ \operatorname{Cl} U \cap \operatorname{Cl} V = \emptyset$ となるような X の開集合 U, V が存在することが分かる。いま X は可分距離空間だから Z もそうであり、$\operatorname{ind} Z \leqq 0$ なのであった。$Z \cap \operatorname{Cl} U$ と $Z \cap \operatorname{Cl} V$ は交わりのない Z の二つの閉集合であるから、定理 4.1 によって $Z \cap \operatorname{Cl} U \subset C,\ Z \cap \operatorname{Cl} V \subset D,\ C \cup D = Z$ かつ $C \cap D = \emptyset$ となる Z の閉集合 C, D が存在する。このとき二つの集合 $U \cup C$ と $V \cup D$ は X の部分集合として分離されているから、系 4.7 より $U \cup C \subset U',\ V \cup D \subset V'$ かつ $U' \cap V' = \emptyset$ となるような X の開集合 U', V' が存在する。 $L = X \setminus (U' \cup V')$ とおけば、L が求めるものである。 □

注意 4.8. 定理 4.4 の主張は、より一般に X が継承的正規空間、Z が第二可算な部分空

間であれば成立する。

最後に可算和定理の 0 次元の特別な場合を証明してこの節を終えよう。この後で分かることだが、これは一般の可算和定理の証明のための準備となっている。

定理 4.9 (**0 次元可算和定理**)**.** X を可分距離空間とする。X が閉集合 $F_i \subset X\,(i = 1, 2, \ldots)$ の和集合で表されているとき、すべての i に対して $\operatorname{ind} F_i \leqq 0$ であれば $\operatorname{ind} X \leqq 0$ である。

証明. $\operatorname{Ind} X \leqq 0$ を示せばよい。それには問題 2.6 によって、交わらない閉集合 $A, B \subset X$ に対して $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V = X$ かつ $U \cap V = \emptyset$ なる開集合 U, V が存在することを示せばよい。そこで $U_0 = V_0 = \emptyset$ とおいて、F_i の閉集合 C_i, D_i および X の開集合 $U_i, V_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ を次を満たすように帰納的に選ぶ：

(1) $(A \cup \operatorname{Cl} U_{i-1}) \cap F_i \subset C_i,\ (B \cup \operatorname{Cl} V_{i-1}) \cap F_i \subset D_i$
(2) $F_i = C_i \cup D_i$, $C_i \cap D_i = \emptyset$
(3) $C_i \cup \operatorname{Cl} U_{i-1} \subset U_i,\ D_i \cup \operatorname{Cl} V_{i-1} \subset V_i$
(4) $\operatorname{Cl} U_i \cap \operatorname{Cl} V_i = \emptyset$

ここで、(1), (2) を満たすような F_i の閉集合 C_i, D_i を取れるのは系 4.2 により $\operatorname{Ind} F_i \leqq 0$ となるからである。このとき和集合 $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i,\ V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$ が求める開集合である。 □

注意 4.10. 注意 4.3 により、上の定理は X が正則 Lindelöf 空間のときにも成立している。

注意 4.11. この節の議論はかなり「可算性」に依存していたことに注意しておこう。具体的には、定理 4.1（0 次元分離定理 I）の証明は空間の Lindelöf 性に依存していたし、定理 4.9 の証明でも閉集合族が可算であることが帰納的議論のために本質的である。

5 基本的な諸定理の証明

ここでは可分距離空間の次元論における諸々の基本定理、とくに部分空間定理・可算和定理・加法定理・分解定理・積定理を証明する。はじめに最も基礎的な部分空間定理を証明しておこう。これは可分距離空間に限らず成立することであるので、一般の正則空間について述べる。正則空間であるという条件は、各点に閉近傍からなる基本近傍系があると言い換えられるから、部分空間に遺伝するのであった。

定理 5.1 (**部分空間定理**)**.** X を正則空間、$A \subset X$ を部分空間とする。このとき、$\operatorname{ind} A \leqq \operatorname{ind} X$ が成り立つ。

この定理の証明を含め、以下では部分空間における境界を扱うことが多いので、次の補題を準備しておく。証明は読者にゆだねる。

補題 5.2. A を位相空間 X の部分集合とする。このとき、任意の $U \subset X$ に対して

$$\mathrm{Bd}_A(U \cap A) \subset (\mathrm{Bd}_X U) \cap A$$

である[*5]。 □

定理 5.1 の証明. $\operatorname{ind} X = \infty$ であるときは何も示すことはないから、$\operatorname{ind} X = n < \infty$ であるとする。n についての帰納法で主張を証明しよう。まず、$n = -1$ であれば $A \subset X = \emptyset$ であるから $A = \emptyset$ で、$\operatorname{ind} A = -1 = \operatorname{ind} X$ であるから、確かに主張は成り立つ。$n \geqq 0$ とし、$n-1$ 以下で主張が成立すると仮定する。$x \in A$ とし、U' を x の A における開近傍とする。このとき $U' = U \cap A$ となるような X の開集合 U が存在する。いま U は x の X における開近傍で、$\operatorname{ind} X = n$ であるから、$V \subset U$ なる x の X における開近傍 V であって、$\operatorname{ind} \mathrm{Bd}_X V \leqq n-1$ となるものが存在する。$V' = V \cap A$ とおくと、V' は x の A における開近傍であり $V' \subset U'$ を満たす。一方、補題 5.2 より

$$\mathrm{Bd}_A V' \subset (\mathrm{Bd}_X V) \cap A \subset \mathrm{Bd}_X V$$

である。よって、帰納法の仮定から $\operatorname{ind} \mathrm{Bd}_A V' \leqq \operatorname{ind} \mathrm{Bd}_X V \leqq n-1$ となる。したがって、 $\operatorname{ind} A \leqq n = \operatorname{ind} X$ である。これで帰納法が完結した。 □

上の証明で X を正規空間、A をその**閉集合**とすれば、大きな帰納的次元 Ind についても全く同様にして部分空間定理が成り立つことが分かる。

定理 5.3 (部分空間定理). X を正規空間、$A \subset X$ を閉集合とする。このとき、$\operatorname{Ind} A \leqq \operatorname{Ind} X$ が成り立つ。 □

問 2.6 でみたように、$\operatorname{Ind} X \leqq 0$ であることは、 X の二つの閉集合について対称的な条件として表すことができた。上の部分空間定理を用いると、一般に $\operatorname{Ind} X \leqq n$ であることも同様に対称的に記述することができる。

命題 5.4. n を非負整数とする。正規空間 X に対して $\operatorname{Ind} X \leqq n$ であるためには、X の任意の交わらない閉集合 A, B に対して、A と B を分ける壁 L であって $\operatorname{Ind} L \leqq n-1$ となるものが存在することが必要十分である。

証明. まず必要性を示すために、$\operatorname{Ind} X \leqq n$ とする。このとき、A, B を X の二つの交わらない閉集合とすると、$U = X \setminus B$ とおくとき U は A の開近傍である。仮定 $\operatorname{Ind} X \leqq n$（と X の正規性）より、A の開近傍 V であって、$\mathrm{Cl}\, V \subset U$ かつ $\operatorname{Ind} \mathrm{Bd}\, V \leqq n-1$ となるものが存在する。そこで、$L = \mathrm{Bd}\, V$ とおくと、L は A と B を分ける壁であり、$\operatorname{Ind} L \leqq n-1$ を満たす。これで必要性が示された。

次に十分性を示そう。A を X の任意の閉集合、U を A の任意の開近傍とする。$B = X \setminus U$ とすると、仮定より A と B を分ける壁 L であって $\operatorname{Ind} L \leqq n-1$ となるものが存在する。このとき、壁の定義より $A \subset V,\ B \subset W,\ X \setminus L = V \cup W$ となる交わ

[*5] U は任意の部分集合でよいが、実際にこの補題を使うのは U が X の開集合である場合に限られる。

らない開集合 V, W が存在する。このとき $V \subset U$ であって、しかも $\mathrm{Bd}\, V \subset L$ であるから、部分空間定理 5.3 より、$\mathrm{Ind}\,\mathrm{Bd}\, V \leqq \mathrm{Ind}\, L \leqq n-1$ である。以上より $\mathrm{Ind}\, X \leqq n$ であり、十分性が示された。 □

次に前節の結果（定理 4.4）を用いて、加法定理の特別な場合を示そう。

定理 5.5 (加法定理の特別な場合)**.** X を可分距離空間、n を非負整数とし、$X = Y \cup Z$ であるとする。このとき、$\mathrm{ind}\, Y \leqq n-1$ かつ $\mathrm{ind}\, Z \leqq 0$ であれば、$\mathrm{ind}\, X \leqq n$ である。

証明. $x \in X$ とし、U を x の開近傍とする。定理 4.4 により、$\{x\}$ と $X \setminus U$ を分ける壁 L であって、$L \cap Z = \emptyset$ となるものが存在する。$Y \cup Z = X$ であったから、$L \subset Y$ である。一方、壁の定義より、

$$X \setminus L = V \cup W, \quad V \cap W = \emptyset, \quad x \in V, \quad X \setminus U \subset W$$

となる開集合 V, W が存在する。このとき、直ちに分かるとおり $V \subset U$ である。また、$\mathrm{Bd}\, V \subset L \subset Y$ であるから、部分空間定理 5.1 より、$\mathrm{ind}\,\mathrm{Bd}\, V \leqq \mathrm{ind}\, Y \leqq n-1$ である。以上から、$\mathrm{ind}\, X \leqq n$ である。 □

さて、再び少しだけ位相空間の一般論に戻る。位相空間 X が第二可算であるというのは、高々可算な開基が**存在する**ことをいうのであった。ところで、この X の**任意の**開基 $\mathcal{B}$ を取ってきたとき、この $\mathcal{B}$ は可算な開基を含むといえるだろうか？　これに対する答えは次の通り、肯定的である。

命題 5.6. X を第二可算な位相空間、$\mathcal{B}$ を X の開基とする。このとき、$\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ となる可算な開基 $\mathcal{B}'$ が存在する。

証明. $\mathcal{B}$ を第二可算な空間 X の開基とする。第二可算性から、X は高々可算な開基 $\{U_i \,|\, i = 1, 2, \ldots\}$ をもつ。このとき

$$J = \{(i, j) \,|\, U_i \subset B \subset U_j \text{ となる } B \in \mathcal{B} \text{ が存在する}\}$$

とおき、各 $(i, j) \in J$ に対して $U_i \subset B_{ij} \subset U_j$ となる $B_{ij} \in \mathcal{B}$ を選ぶ。このとき、$\mathcal{B}' = \{B_{ij} \,|\, (i, j) \in J\}$ とおけば、$\mathcal{B}'$ は $\mathcal{B}$ の高々可算な部分集合であるが、これは X の開基をなす。実際、$x \in X$ とし、U を x の開近傍とすると、$x \in U_i \subset B \subset U_j \subset U$ となるような正の整数 i, j および $B \in \mathcal{B}$ が存在する。すると $(i, j) \in J$ だから $B_{ij} \in \mathcal{B}'$ が定義され、$x \in U_i \subset B_{ij} \subset U_j \subset U$ である。よって $\mathcal{B}'$ は X の開基である。 □

この命題の証明で本質的なのは、可算集合の二つの直積は、可算集合であるという事実である。一般に無限濃度 κ について、濃度が κ の集合の二つの直積は濃度が κ となるから、実際には任意の無限濃度について上と同様の命題が成り立つことに注意しておく。

小さな帰納的次元 ind の定義といま示した命題 5.6 から、直ちに次が得られる。

命題 5.7. X を正則空間、n を非負整数とするとき、$\mathrm{ind}\, X \leqq n$ であるためには、X の開基 $\mathcal{B}$ であって各 $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathrm{ind}\,\mathrm{Bd}\, U \leqq n-1$ となるようなものが存在すること

が必要十分である。X が可分距離空間である場合は、この $\mathcal{B}$ として高々可算なものが取れる。 □

この命題の後半が成立することが、可分距離空間において（Ind や dim ではなく）ind を用いて理論を展開することの利点である。

さて、この命題と 0 次元可算和定理 4.9、および加法定理の特別な場合（定理 5.5）を用いて、可分距離空間に対する一般の可算和定理を証明することができる。

定理 5.8 (**可算和定理**). X を可分距離空間、n を非負整数とする。X が閉集合 $F_i \subset X\,(i = 1, 2, \ldots)$ の和集合で表されているとき、すべての i に対して $\operatorname{ind} F_i \leqq n$ であれば $\operatorname{ind} X \leqq n$ である。

証明. n についての帰納法による。$n = 0$ の場合は、0 次元可算和定理 4.9 ですでに示されている。そこで $n \geqq 1$ とする。命題 5.7 により、各 i に対して X の部分空間 F_i の高々可算な開基 $\mathcal{B}_i$ を、各 $U \in \mathcal{B}_i$ に対して $\operatorname{ind} \operatorname{Bd}_{F_i} U \leqq n-1$ となるような取ることができる。そこで

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup \{\operatorname{Bd}_{F_i} U \,|\, U \in \mathcal{B}_i\}$$

とおく。$\mathcal{B}_i$ は可算であったから、帰納法の仮定により、$\operatorname{ind} Y \leqq n-1$ である。そこで $Z = X \setminus Y$ とおく。このとき $\operatorname{ind} Z \leqq 0$ であることを示そう。そのためには、0 次元可算和定理 4.9 によって、各 i に対して $\operatorname{ind}(Z \cap F_i) \leqq 0$ であることを示せば十分である。ところが補題 5.2 により、各 $U \in \mathcal{B}_i$ に対して

$$\operatorname{Bd}_{Z \cap F_i}(Z \cap U) \subset (\operatorname{Bd}_{F_i} U) \cap Z = \emptyset$$

である。すなわち、$\operatorname{ind} \operatorname{Bd}_{Z \cap F_i}(Z \cap U) = -1$ である。$\{Z \cap U \,|\, U \in \mathcal{B}_i\}$ は $Z \cap F_i$ の開基をなすから、命題 5.7 により $\operatorname{ind}(Z \cap F_i) \leqq 0$, したがって $\operatorname{ind} Z \leqq 0$ である。$X = Y \cup Z$ であるから、前に示された $\operatorname{ind} Y \leqq n-1$ を合わせて、定理 5.5 により $\operatorname{ind} X \leqq n$ である。これで帰納法が完結した。 □

続いて、分解定理を証明しよう。

定理 5.9 (**分解定理 I**). X を可分距離空間、n を非負整数とする。このとき、$\operatorname{ind} X \leqq n$ であるためには、$X = Y \cup Z,\ \operatorname{ind} Y \leqq n-1,\ \operatorname{ind} Z \leqq 0$ となる X の部分空間 Y, Z が存在することが必要十分である。

証明. 十分性は、定理 5.5 である。必要性を示そう。X を $\operatorname{ind} X \leqq n$ なる可分距離空間とすると、命題 5.7 により、X の開基 $\{U_i \,|\, i = 1, 2, \ldots\}$ であって $\operatorname{ind} \operatorname{Bd} U_i \leqq n-1$ となるようなものが存在する。そこで $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Bd} U_i$ とおくと、可算和定理 5.8 により $\operatorname{ind} Y \leqq n-1$ である。あとは $Z = X \setminus Y$ とおいて $\operatorname{ind} Z \leqq 0$ を示せばよい。ところが、$\{U_i \cap Z \,|\, i = 1, 2, \ldots\}$ は Z の開基となり、補題 5.2 より $\operatorname{Bd}_Z(U_i \cap Z) \subset (\operatorname{Bd}_X U_i) \cap Z = \emptyset$ であるから、命題 5.7 より $\operatorname{ind} Z \leqq 0$ である。 □

この定理を繰り返し適用すれば、直ちに次が得られる。

定理 5.10 (分解定理 II). X を可分距離空間、n を非負整数とする。このとき、$\operatorname{ind} X \leqq n$ であるためには、$X = Z_0 \cup Z_1 \cup \cdots Z_n,\ \operatorname{ind} Z_i \leqq 0$ となる X の $n+1$ 個の部分空間 $Z_i\,(i = 0, 1, \ldots, n)$ が存在することが必要十分である。 □

この形の分解定理を用いて、加法定理もすぐに証明できる。

定理 5.11 (加法定理). X を可分距離空間、$X = Y_1 \cup Y_2$ とする。このとき

$$\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{ind} Y_1 + \operatorname{ind} Y_2 + 1$$

である。

証明. $m_i = \operatorname{ind} Y_i < \infty\,(i = 1, 2)$ であるとしてよい。分解定理 5.10 より、$Y_1 = \bigcup_{j=1}^{m_1+1} Z_j,\ Y_2 = \bigcup_{k=1}^{m_2+1} Z'_k,\ \operatorname{ind} Z_j \leqq 0,\ \operatorname{ind} Z'_k \leqq 0$ と表すことができる（添字の範囲に注意）。したがって、再び分解定理 5.10 より、

$$\begin{aligned}\operatorname{ind} X &= \operatorname{ind}\left(\bigcup_{j=1}^{m_1+1} Z_j \cup \bigcup_{k=1}^{m_2+1} Z'_k\right)\\ &\leqq (m_1+1) + (m_2+1) - 1 = m_1 + m_2 + 1\end{aligned}$$

である。 □

続いて、積定理を証明する。

定理 5.12 (積定理). X_1, X_2 を、同時には空でない可分距離空間とする。このとき

$$\operatorname{ind}(X_1 \times X_2) \leqq \operatorname{ind} X_1 + \operatorname{ind} X_2$$

である。

証明. $m_i = \operatorname{ind} X_i < \infty\,(i = 1, 2)$ としてよい。$m_1 + m_2 (\geqq -1)$ についての帰納法で定理を証明する。$m_1 + m_2 = -1$ のとき、X_1 と X_2 のどちらかは空であるから、$X_1 \times X_2$ は空となり、定理の主張は明らかである。$(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ とし、U を (x_1, x_2) の $X_1 \times X_2$ における開近傍とする。このとき、x_i の X_i における開近傍 $V_i\,(i = 1, 2)$ であって、$V_1 \times V_2 \subset U$ となるものが存在する。更に、$V_i \subset W_i$ となる x_i の X_i における開近傍 $W_i\,(i = 1, 2)$ であって、$\operatorname{ind} \operatorname{Bd} W_i \leqq m_i - 1$ となるものが存在する。このとき、簡単に確かめられる通り

$$\operatorname{Bd}_{X_1 \times X_2}(W_1 \times W_2) = A \cup B$$

である。ただし、$A = \operatorname{Cl}_{X_1} W_1 \times \operatorname{Bd}_{X_2} W_2,\ B = \operatorname{Bd}_{X_1} W_1 \times \operatorname{Cl}_{X_2} W_2$ とする。部分空間定理 5.1 より $\operatorname{ind} \operatorname{Cl}_{X_i} W_i \leqq \operatorname{ind} X_i \leqq m_i$ であるから、帰納法の仮定より、$\operatorname{ind} A \leqq m_1 + m_2 - 1,\ \operatorname{ind} B \leqq m_1 + m_2 - 1$ である。A と B は $\operatorname{Bd}_{X_1 \times X_2}(W_1 \times W_2)$ の閉集合であるから、可算和定理 5.8 より、$\operatorname{ind} \operatorname{Bd}_{X_1 \times X_2}(W_1 \times W_2) \leqq m_1 + m_2 - 1$ である。よって、$\operatorname{ind}(X_1 \times X_2) \leqq m_1 + m_2$ となる。これで帰納法が完結した。 □

問 2.4 と上の積定理 5.12 から、直ちに次が得られる。

系 5.13. 非負整数 n に対して、$\operatorname{ind}\mathbb{R}^n \leqq n$ である。 □

逆向きの不等号 $\operatorname{ind}\mathbb{R}^n \geqq n$ は次節で証明される。一般に、次元の下からの評価を与えることは、上からの評価を与えることよりも難しい場合が多い。

さて、上の系 5.13 と分解定理 5.10 を合わせれば、$\mathbb{R}^n$ は 0 次元以下の部分空間の $n+1$ 個の和で表されることが分かる。しかし、この場合には、以下のようにして非常に具体的に分解を構成することができる。

例 5.14. n を正の整数とし、$k = 0, 1, \ldots, n$ に対して

$$\mathbb{Q}^n_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_i \in \mathbb{Q} \text{ となる } i \text{ はちょうど } k \text{ 個 }\}$$

とおく。すると $\mathbb{R}^n = \mathbb{Q}^n_0 \cup \mathbb{Q}^n_1 \cup \cdots \mathbb{Q}^n_n$ である。このとき、任意の $k = 0, 1, \ldots, n$ に対して $\operatorname{ind}\mathbb{Q}^n_k = 0$ となることを示そう。まず、定義から $\mathbb{Q}^n_0 = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$, $\mathbb{Q}^n_n = \mathbb{Q}^n$ であるから、$k = 0, n$ の場合には問 2.5 により $\operatorname{ind}\mathbb{Q}^n_k = 0$ である。そこで $0 < k < n$ としよう。このときは

$$\mathbb{Q}^n_k = \bigcup_{1 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq n} \ \bigcup_{(q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{Q}^k} Z(i_1, \ldots, i_k; q_1, \ldots, q_k)$$

と表すことができる。ここで、

$$Z(i_1, \ldots, i_k; q_1, \ldots, q_k) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n_k \,|\, x_{i_1} = q_1, \ldots, x_{i_k} = q_k\}$$

である。直ちに分かるとおり、$Z(i_1, \ldots, i_k; q_1, \ldots, q_k)$ は $\mathbb{Q}^n_k$ の閉部分集合であり、$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{n-k}$ と同相である。ところが、$\operatorname{ind}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{n-k} = 0$ であるから、可算和定理 5.8 から $\operatorname{ind}\mathbb{Q}^n_k = 0$ である。

次に、分解定理を応用して、前節の 0 次元分離定理（定理 4.1, 4.4）の n 次元への一般化を証明しよう。まず、定理 4.1 を一般化したものが次の定理である。

定理 5.15 ($\boldsymbol{n}$ 次元分離定理 I). n を非負整数とし、可分距離空間 X が $\operatorname{ind} X \leqq n$ をみたすとする。このとき、X の閉集合 A, B に対して $A \cap B = \emptyset$ ならば、A と B を分ける壁 L であって、$\operatorname{ind} L \leqq n-1$ となるものが存在する。

また、定理 4.4 を一般化したものが次の定理である。

定理 5.16 ($\boldsymbol{n}$ 次元分離定理 II). n を非負整数、X を可分距離空間、A, B を X の閉集合とし、$A \cap B = \emptyset$ とする。$Z \subset X$ が $\operatorname{ind} Y \leqq n$ を満たせば、A と B を分ける壁 L であって、$\operatorname{ind}(L \cap Y) \leqq n-1$ となるものが存在する。

0 次元のときと同じように、定理 5.16 において $Z = X$ とすると定理 5.15 が得られる。しかし 0 次元のときとは異なり、今回は初めから「分離定理 II」である定理 5.16 の方を示すことができる。

定理 5.16、とくに定理 5.15 の証明. A, B, Y を定理 5.16 の仮定のとおりとする。分解定理 5.9 により、$Y = Y' \cup Z$, $\operatorname{ind} Y' \leqq n-1$, $\operatorname{ind} Z \leqq 0$ と表すことができる。0 次元分離定理 4.4 により、A と B を分ける壁 L であって、$L \cap Z = \emptyset$ となるものが存在する。このとき $L \cap Y \subset Y'$ となるから、部分空間定理 5.1 により $\operatorname{ind}(L \cap Y) \leqq \operatorname{ind} Y' \leqq n-1$ である。 □

定理 5.16 は、次の節で $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \geqq n$ を証明するときに利用する。一方、定理 5.15 は次の重要な帰結をもつ。

系 5.17. 任意の可分距離空間 X に対して、$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ である。

証明. 命題 2.4 により、$\operatorname{Ind} X \leqq \operatorname{ind} X$ を示せば十分である。$\operatorname{ind} X = \infty$ であれば示すことは何もないから、$\operatorname{ind} X = n < \infty$ とし、n についての帰納法で証明する。$n = -1$ の場合は明らかである。$n \geqq 0$ とし、$n-1$ 以下で主張が成り立つとする。$\operatorname{Ind} X \leqq n$ であることを命題 5.4 を用いて証明しよう。そのために A, B を X の交わらない閉集合とすると、定理 5.15 により、A と B を分ける壁 L であって、$\operatorname{ind} L \leqq n-1$ となるものが存在する。ところが、帰納法の仮定により、このとき $\operatorname{Ind} L \leqq \operatorname{ind} L$ であるから、$\operatorname{Ind} L \leqq n-1$ である。 □

最後に、積定理 $\operatorname{ind}(X_1 \times X_2) \leqq \operatorname{ind} X_1 + \operatorname{ind} X_2$ において等号が成立しない例を挙げておこう。この例は読み飛ばしても次節以降を読むときには差し支えない。

例 5.18. ℓ^2 を実数列のなす可分 Hilbert 空間とする。すなわち、

$$\ell^2 = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

とし、ℓ^2 の点 $x = (x_i)$ に対して $\|x\| = (\sum x_i^2)^{1/2}$ とおき、$x = (x_i)$ と $y = (y_i)$ との間の距離は $d(x, y) = \|x - y\|$ とする。E を、すべての座標 x_i が有理数であるような ℓ^2 の点 (x_i) の全体とすると、E は ℓ^2 から誘導された距離について可分距離空間となる。E を **Erdős 空間**という。

このとき容易に分かるように、$E \times E$ は E と同相であるから、$\operatorname{ind}(E \times E) = \operatorname{ind} E$ である。しかし、以下に示すように $\operatorname{ind} E = 1$ である。したがって、$\operatorname{ind}(E \times E) = 1$, $\operatorname{ind} E + \operatorname{ind} E = 2$ となって、積定理 5.12 の不等号は $X_1 = X_2 = E$ のとき成立しないことがわかる。

さて、まず $\operatorname{ind} E \geqq 1$ を示そう。それには $\operatorname{ind} E \leqq 0$ ではないことを示せばよい。そのためにより強く、E の任意の空でない有界な開集合 U に対して $\operatorname{Bd}_E U \neq \emptyset$ であることを示そう。このとき $(0, 0, \ldots) \in U$ であるとして一般性を失わない。有理数列 $x_1, x_2, \ldots$ を以下のように帰納的に定める。まず、U の有界性より、$x_1 \in \mathbb{Q}$ を $p_1 = (x_1, 0, 0, \ldots) \in U$ かつ $d(p_1, E \setminus U) < 1$ であるように取れる。次に $x_1, \ldots, x_{i-1} \in \mathbb{Q}$ が定まり、$p_{i-1} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, 0, \ldots) \in U$ であるとする。このとき $x_i \in \mathbb{Q}$ を、$p_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, 0, 0, \ldots) \in U$ かつ $d(p_i, E \setminus U) < 1/i$ であるように取れる。このようにして有理数列 $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ を定めると、$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ である。実際、$R > 0$ を U の直径よりも大きくとれば、$\|p_n\| < R$, すなわち $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < R^2$ がすべての n に対して成り立つからである。したがって $p = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ は E の点であり、$\lim_{i \to \infty} p_i = p$ となる。よって $p \in \operatorname{Cl}_E U$ である。また、すべての i に対して $d(p_i, E \setminus U) < 1/i$ であるから $p \in E \setminus U$ となる。以上から、$p \in \operatorname{Bd}_E U$ であり、とくに $\operatorname{Bd}_E U \neq \emptyset$ であることが分かった。

次に $\operatorname{ind} E \leqq 1$ であることを示そう。そのためには、E と ℓ^2 の単位球面 $S = \{x \in \ell^2 \mid \|x\| = 1\}$ との交わり $E \cap S$ に対して $\operatorname{ind}(E \cap S) = 0$ であることを証明すれば十分である。ところが、関数解析でよく知られているように、単位球面 S において点列 (p_i) が収束することは、$p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots)$ の各成分のなす数列 $(p_{ij})_{i=1}^{\infty}$ がすべての j に対して収束することと同値である。したがって、$E \cap S$ 上の位相は、$\mathbb{Q}$ の可算個のコピーの直積空間 $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}$ からの相対位相と一致する。よって、問 2.4, 2.5 によって $\operatorname{ind}(E \cap S) = 0$ である。

6 ユークリッド空間の次元

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^n = n$ であることは、次元論の最も重要な事実である。この節は、そのうち $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = n$ の証明を与えることが目的である。しかし、その証明（中でも $\operatorname{ind} \mathbb{R}^n \geqq n$ となることの証明）を、今までのような位相空間論的な道具立てだけから行うことは難しい。より具体的には、$I = [0, 1]$ を単位閉区間とするとき I^n から自分自身への連続写像は不動点をもつという有名な「Brouwer の不動点定理」（あるいはそれと同値な命題）が必要となり、これにはホモロジー論など何かしらの別の道具が必要となる。

できるだけ初等的な範囲で議論を完結させるため、組合せ的な補題を援用して、この不動点定理を証明している次元論の本もある。しかし、その場合でも組合せ的議論の中身をよく見てみると、ホモロジー論的な証明とさほど違いがあるとは言えない。

本稿では迂回を避けるため、 Brouwer の不動点定理の証明は代数的トポロジーなどの教科書に譲って話を進める。

定理 6.1 (Brouwer の不動点定理). n を非負整数とするとき、任意の連続写像 $f \colon I^n \to I^n$ に対して、$x \in I^n$ であって $f(x) = x$ となるものが存在する。 □

これから、次元論的に重要な次の事実を導くことができる。

定理 6.2 (Eilenberg-Otto の定理). n を正の整数とする。$A_i, B_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ を立方体 I^n の面、すなわち次で定義される I^n の部分集合とする。

$$A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid x_i = 0\}, \quad B_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in I^n \mid x_i = 1\}$$

このとき、$L_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ が A_i と B_i を分ける壁であれば $\bigcap_{i=1}^{n} L_i \neq \emptyset$ である。

証明. 壁の定義より、各 i に対して、$I^n \setminus L_i = U_i \cup V_i$ なる交わらない開集合 U_i, V_i を $A_i \subset U_i,\ B_i \subset V_i$ となるように取ることができる。I^n には $\mathbb{R}^n$ の部分集合としてのユークリッド距離を入れて、連続写像 $v \colon I^n \to \mathbb{R}^n$ を $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$, ただし

$$v_i(x) = \begin{cases} d(x, L_i) & x \in U_i \cup L_i \text{ のとき} \\ -d(x, L_i) & x \in V_i \cup L_i \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義する。その上で各 $x \in I^n$ に対して

$$f(x) = x + v(x)$$

と定義すると、$f(x) \in I^n$ である。実際、$x = (x_1, \ldots, x_n)$ とし、例えば $x \in U_i \cup L_i$ であるとすると、x と点 $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ を結ぶ線分 S は L_i と交わらなければならない[*6]。その交点の第 i 成分を $\tilde{x}_i$ とすれば、$0 \leqq x_i \leqq x_i + d(x, L) \leqq \tilde{x}_i \leqq 1$ である。よって $f(x)$ の第 i 成分 $x_i + d(x, L)$ は $I = [0, 1]$ に属する。$x \in V_i \cup L_i$ のときも同様である。

こうして、f は連続写像 $f \colon I^n \to I^n$ を与えるから、Brouwer の不動点定理 6.1 より $f(x) = x$ すなわち $v(x) = 0$ となるような点 $x \in I^n$ が存在する。v の定義より、このとき $x \in \bigcap_{i=1}^n L_i$ である。 □

定理 6.3. n を非負整数とするとき、$\operatorname{ind} I^n \geqq n$ である。

証明. $n = 0$ のときは明らかだから、$n \geqq 1$ とする。$\operatorname{ind} I^n = k < n$ であったとして、矛盾を導こう。立方体 I^n の面 $A_i, B_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ を定理 6.2 のときと同様に定義する。定理 5.15 を用いると、まず A_1 と B_1 を分ける壁 L_1 を $\operatorname{ind} L_1 \leqq k - 1$ となるように取れる。次に定理 5.16 により、A_2 と B_2 を分ける壁 L_2 を $\operatorname{ind}(L_1 \cap L_2) \leqq k - 2$ となるように取れる。

以下繰り返し定理 5.16 を用いて、最終的には A_i と B_i を分ける壁 $L_i\,(i = 1, 2, \ldots, k+1)$ を $\operatorname{ind}(\bigcap_{i=1}^{k+1} L_i) = -1$ となるように取れる。これは

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} L_i = \emptyset$$

を意味している。もし $k + 1 < n$ であれば $i = k + 2, \ldots, n$ に対して A_i, B_i を分ける壁 L_i を何でもよいので追加すれば $\bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$ となり、定理 6.2 に反する。 □

定理 6.4. n を非負整数とするとき、$\operatorname{ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{ind} I^n = \operatorname{Ind} I^n = n$ である。

証明. 定理 6.3、部分空間定理 5.1、および系 5.13 より

$$n \leqq \operatorname{ind} I^n \leqq \operatorname{ind} \mathbb{R}^n \leqq n$$

であるから、$\operatorname{ind} I^n = \operatorname{ind} \mathbb{R}^n = n$ である。更に、系 5.17 より、$\operatorname{Ind} I^n = \operatorname{ind} I^n = n$, $\operatorname{Ind} \mathbb{R}^n = \operatorname{ind} \mathbb{R}^n = n$ である。 □

被覆次元 dim について $\dim \mathbb{R}^n = n$ となることはまだ証明していない。これを直接証明することも興味深いし、可能である。しかし本稿では、この定理 6.4 と第 8 節で示される一致定理を合わせて間接的に $\dim \mathbb{R}^n = n$ を示すこととしたい。

[*6] $x \in L_i$ のときこれは自明である。$x \in U_i$ のとき、もし S が L_i と交わらなければ、S は交わりのない空でない二つの開集合 $S \cap U_i, S \cap V_i$ の和集合に表せるので、線分 S の連結性に反する。

7　開被覆と脈体

一般の位相空間から幾何的な性質を取り出すのに有効な方法の一つは、まず位相空間の十分細かい開被覆を取り、その開被覆をなす開集合どうしのつながり具合を表現した**脈体 (nerve)** とよばれる単体複体を考えることである。単体複体（より正確には、その標準的幾何実現）は組合せ的な構造をもち、元の位相空間よりも取扱いやすい位相的性質をもっている。また、脈体は開被覆のつながり具合のデータから作られているので、もとの空間をある程度近似している。その近似の精度は開被覆を細分すればするほど高い。このように脈体を考えることで、位相空間をより扱いやすい空間で近似することが可能になるから、位相空間論において脈体は非常に有効な道具である。その一端を次元論の展開で見ていくことにしよう。

7.1　単体複体と単体写像

まず、単体複体とそれに関する用語についてまとめておく。**単体複体**とは、空でない有限集合からなる族 K であって、$\sigma \in K$ かつ $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in K$ という性質を満たすものである。K の元のことを K の**単体**という。単体は空でない有限集合であるが、とくに $n+1$ 個の元からなる単体を、**n 単体**と呼び、このとき σ の**次元**は n であるといい $\dim \sigma = n$ と書く。また、$\dim K = \sup\{\dim \sigma \,|\, \sigma \in K\}$ とおいて、これを単体複体 K の**次元**という。$\dim K$ の値は -1 以上の整数または ∞ である[*7]。単体や単体複体の次元の記号には被覆次元と同じ dim を用いるが、混乱の余地はないであろう。

K の単体 σ, τ に対して $\tau \subset \sigma$ が成り立つとき、τ は σ の**面**であるという。K の単体 σ に対して、σ の元を σ の**頂点**という。K のある単体の頂点のことを K の**頂点**といい、K の頂点全体の集合を $K^{(0)}$ で表す。すなわち、

$$K^{(0)} = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

とする。単体複体 K の部分集合 L がそれ自身で単体複体をなすとき、L を K の**部分複体**であるという。もちろん、L が K の部分複体であるとき $L^{(0)} \subset K^{(0)}$ である。部分複体の任意個の和集合および共通部分は、部分複体となることが簡単に確かめられる。

例 7.1. 単体複体 K と非負整数 n に対して、

$$K^{(n)} = \{\sigma \in K \mid \dim \sigma \leqq n\}$$

とおくと、$K^{(n)}$ は K の部分複体である。この部分複体を、K の **n 骨格 (n-skeleton)** という。なお、$n = 0$ のとき、上の $K^{(n)}$ は K の 0 単体全体であるが、これは 0 単体 $\{v\}$ と頂点 v とを同一視することで、前に定義した $K^{(0)}$ と同一視できる。

[*7] $K = \emptyset$ のときは $\dim \emptyset = -1$ とする。

単体複体 K は、集合として有限集合であるとき、つまり有限個の単体からなるとき、**有限**であるという。直ちに分かるとおり、単体複体 K が有限であることは、頂点の集合 $K^{(0)}$ が有限であることと同値である。有限でない単体複体も重要であるが、本稿の範囲では、有限な単体複体しか必要としない。有限な単体複体は、そうでないものよりも取扱いが技術的に易しくなる。そこで、**以下では単体複体はすべて有限であると仮定する。**とくに、単体複体 K の次元 $\dim K$ は常に有限である。

我々は単体複体を幾何的対象として見たい。それは次のようになされる。K を（有限な）単体複体とするとき、有限集合 $K^{(0)}$ から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす実ベクトル空間 $E = \mathbb{R}^{K^{(0)}}$ を考える。すると、E には $\mathbb{R}$ の有限個の直積として、直積位相を入れることができる。

K の各頂点 $v \in K^{(0)}$ に対して、$E = \mathbb{R}^{K^{(0)}}$ の点 $e_v \in E$ を

$$e_v(w) = \begin{cases} 1 & w = v \text{ のとき} \\ 0 & w \neq v \text{ のとき} \end{cases}$$

により定義する。以下、$e_v \in E$ を $v \in K^{(0)}$ を同一視して、e_v のことを単に v と書くことにしよう。k を任意の非負整数とするとき、K の各 n 単体 $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \in K$ に対して E の部分集合 $|\sigma|$ を、$v_0, v_1, \ldots, v_n$ の凸結合の全体、すなわち

$$|\sigma| = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\, t_i \geqq 0 \right\}$$

で定める。$n = 0$ のとき、これは一点集合 $\{v_0\}$ であり、$n = 1$ のときは v_0 と v_1 を結ぶ線分、$n = 2$ のときは v_0, v_1, v_2 を頂点とする三角形、$n = 3$ のときは v_0, v_1, v_2, v_3 を頂点とする四面体、などとなる。$|\sigma|$ を n 単体 σ の**標準的幾何実現**という。多少紛らわしい言い方だが、標準的幾何実現 $|\sigma|$ のことも K の $\boldsymbol{n}$ **単体**と呼ぶ。n 単体 $|\sigma|$ の**境界** $\partial|\sigma|$ を $|\sigma|$ の以下の部分集合とする。

$$\partial|\sigma| = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} t_i = 1,\, t_i \geqq 0,\ \text{ある } i \text{ に対して } t_i = 0 \right\} = \bigcup_{\emptyset \neq \tau \subsetneqq \sigma} |\tau|$$

この上で、K の**標準的幾何実現** $|K|$ をすべての単体 σ にわたる $|\sigma|$ の和集合として定義する。すなわち、

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma| \subset E$$

とする。この $|K|$ には、$E = \mathbb{R}^{K^{(0)}}$ 上の直積位相からの相対位相を入れる。K の各頂点 $v \in K^{(0)}$ に対して、$\mathrm{pr}_v \colon E \to \mathbb{R}$ を第 v 成分への射影とし、その $|K|$ への制限も同じ記号 $\mathrm{pr}_v \colon |K| \to \mathbb{R}$ で表す。$|K|$ 上の位相の定義から、直ちに次が分かる。

補題 7.2. X を位相空間、K を有限単体複体とする。このとき、写像 $f \colon X \to |K|$ が連続であるためには、各 $v \in K^{(0)}$ に対して $\mathrm{pr}_v \circ f \colon X \to \mathbb{R}$ が連続であることが必要十分である。 □

L を K の部分複体とすると $|L| \subset \mathbb{R}^{L^{(0)}}$ であるが、$L^{(0)} \subset K^{(0)}$ であるから、$\mathbb{R}^{L^{(0)}}$ を自然に $E = \mathbb{R}^{K^{(0)}}$ の部分ベクトル空間とみなすことができる。よって、$|K|, |L|$ をともに E の部分集合とみなすことができる。以下のことは簡単に確かめられる。

命題 7.3. 単体複体 K に対して、次が成り立つ。

(1) $|K|$ はコンパクトである。
(2) $\sigma, \tau \in K$ に対して、$\sigma \cap \tau = \emptyset$ のとき $|\sigma| \cap |\tau| = \emptyset$ であり、$\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ のとき $|\sigma| \cap |\tau| = |\sigma \cap \tau|$ である。
(3) L を K の部分複体とすると包含関係 $|L| \subset |K|$ が成り立ち、$|L|$ は $|K|$ の閉部分集合である。
(4) $|K|$ から位相空間 X への写像 $f\colon |K| \to X$ が連続であるためには、各単体 σ に対して制限 $f|_{|\sigma|}\colon |\sigma| \to X$ が連続であることが必要十分である。 □

単体複体の間の写像として重要なのが単体写像である。K, L を単体複体とするとき、頂点集合の間の写像 $f\colon K^{(0)} \to L^{(0)}$ であって、K の任意の単体 σ に対して、像 $f(\sigma) = \{f(v) \,|\, v \in \sigma\}$ が L の単体となるものを K から L への**単体写像**といい、このとき $f\colon K \to L$ と書くことにする。単体写像 $f\colon K \to L$ に対しては、各 $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\} \in K$（ただし、$n = \dim \sigma$）に対して $f_\sigma\colon |\sigma| \to |f(\sigma)|$ を

$$f_\sigma(\sum_{i=0}^{n} t_i v_i) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$$

で定義するとき、命題 7.3 (4) から $|f||_{|\sigma|} = f_\sigma \, (\sigma \in K)$ が成立するような連続写像 $|f|\colon |K| \to |L|$ が一意的に定まることが分かる。この連続写像 $|f|$ のことも**単体写像**と呼ぶことにする。

以下では簡単のため、ある単体複体 K の標準的幾何実現 $|K|$ として得られる空間を**多面体**と呼ぶことにしよう。多面体 $|K|$ は以下で見るように、開星状体とよばれる開集合による「標準的な」開被覆をもつ。

$|K|$ は $E = \mathbb{R}^{K^{(0)}}$ の部分集合であった。各頂点 $v \in K^{(0)}$ に対して、第 v 成分を与える射影を $\mathrm{pr}_v\colon E \to \mathbb{R}$ は連続である。よって、

$$O_K(v) = \{x \in |K| \,|\, \mathrm{pr}_v(x) > 0\}$$

は $|K|$ の開集合である。$O_K(v)$ を v における（K に関する）**開星状体 (open star)** という。開星状体の全体

$$\mathcal{O}_K = \{O_K(v) \,|\, v \in K^{(0)}\}$$

は多面体 $|K|$ の開被覆をなす。次は開星状体のみたす重要な性質である。

命題 7.4. $K^{(0)}$ の空でない部分集合 σ が K の単体であるためには、

$$\bigcap_{v \in \sigma} O_K(v) \neq \emptyset$$

が必要十分である。

証明. まず必要性を示す。σ が K の n 単体であるとすると、$\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ と書くことができるから、$x = \sum_{i=0}^{n}(n+1)^{-1}v_i$ とおくと $x \in \bigcap_{i=0}^{n} O_K(v_i) = \bigcap_{v\in\sigma} O_K(v)$ である。次に十分性を示す。$\bigcap_{v\in\sigma} O_K(v) \neq \emptyset$ が成り立つとする。$x \in \bigcap_{v\in\sigma} O_K(v)$ となる点 x を固定する。すると、すべての $v \in \sigma$ に対して $\mathrm{pr}_v(x) > 0$ である。また、$O_K(v) \subset |K|$ により $x \in |K|$ だから、$x \in |\tau|$ となる単体 $\tau \in K$ が存在する。このとき、すべての $v \in K^{(0)} \setminus \tau$ に対して $\mathrm{pr}_v(x) = 0$ である。以上から、$\sigma \subset \tau$ でなければならない。一方 $\tau \in K$ であったので、K が単体複体であることの定義から $\sigma \in K$ である。 □

7.2 脈体と標準写像

さて、開被覆の脈体の定義を与えよう。

定義 7.5. X を位相空間、$\mathcal{U}$ を X の有限開被覆とする。このとき、$\mathcal{U}$ の空でない部分集合 $\{U_0, U_1, \ldots, U_k\}$ であって $\bigcap_{i=0}^{k} U_i \neq \emptyset$ であるもの全体の族を $N(\mathcal{U})$ とおくと、$N(\mathcal{U})$ は単体複体である。この単体複体 $N(\mathcal{U})$ を開被覆 $\mathcal{U}$ の**脈体 (nerve)** という。

この脈体 $N(\mathcal{U})$ の標準的幾何実現 $|N(\mathcal{U})|$ のことも簡単に**脈体**と呼ぶことにする。脈体 $|N(\mathcal{U})|$ が、位相空間 X を「近似する」幾何的対象であるというのが基本的なアイディアである。例えば X 自身が多面体のときは、次のようにして脈体を元の X に一致させることができる。

例 7.6. X を多面体 $|K|$ とし、$\mathcal{U}$ を開星状体による開被覆 $\mathcal{O}_K = \{O_K(v) \mid v \in K^{(0)}\}$ とする。このとき、命題 7.4 から、脈体 $N(\mathcal{U})$ は頂点の対応 $O_K(v) \leftrightarrow v$ により自然に元の単体複体 K と同一視され、したがって $X = |K|$ と $|N(\mathcal{U})|$ は自然に同相である。

被覆次元の定義も、近似に必要な脈体の次元であると考えると分かりやすい。実際、正規空間 X に対して $\dim X \leqq n$ であることは、X の任意の有限開被覆が、$\dim N(\mathcal{V}) \leqq n$ となるような有限開被覆 $\mathcal{V}$ によって細分されることと言い換えられる。ここで $\dim N(\mathcal{V})$ は単体複体としての次元を意味する。

多面体よりも一般的な位相空間 X やその開被覆 $\mathcal{U}$ についても空間 X と脈体 $|N(\mathcal{U})|$ が「似ている」と言うためには、空間と脈体の間に対応をつける写像が必要である。それが、以下で定義される標準写像である[*8]。

定義 7.7. 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対して、連続写像 $\varphi\colon X \to |N(\mathcal{U})|$ が**標準写像 (canonical map)** であるとは、任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して

$$\varphi^{-1}(O_{N(\mathcal{U})}(U)) \subset U$$

が成り立つことである。

[*8] この写像は、その名に反して、一意的に定まるわけではなく、ホモトピーを除いて一意的に定まるだけである（定理 7.9, 7.10）。同じものを**重心写像 (barycentric map)** と呼ぶ文献もある。

上の記法は少し混乱しやすいかもしれない。開被覆 $\mathcal{U}$ の元 U は、単体複体 $N(\mathcal{U})$ においては頂点になっているから、開星状体 $O_{N(\mathcal{U})}(U)$ が定義され、これは $|N(\mathcal{U})|$ の開集合である。標準写像の定義の次の言い換えは簡単に示すことができ、有用である。

命題 7.8. 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ と連続写像 $\varphi\colon X \to |N(\mathcal{U})|$ に対して、次は同値である。

(1) φ は標準写像である。
(2) $x \in X$ と $U \in \mathcal{U}$ に対して、$x \notin U$ ならば $\mathrm{pr}_U\, \varphi(x) = 0$ である。
(3) 任意の $x \in X$ に対して、$x \in \bigcap_{i=0}^n U_i$ となる $U_0, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n t_i U_i$ と凸結合で表される。 □

さて、正規空間の有限開被覆に対して常に標準写像が存在することを示そう。

定理 7.9. X を正規空間、$\mathcal{U}$ を X の有限開被覆とする。このとき、標準写像 $\varphi\colon X \to |N(\mathcal{U})|$ が存在する。

証明. $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ と表すことができる。X が正規空間であることから、X の開被覆 $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ であって、$\mathrm{Cl}\, V_i \subset U_i$ となるようなものが存在する。再び X の正規性から、Urysohn の補題によって、連続写像 $f_i\colon X \to [0,1]$ であって $f_i|_{\mathrm{Cl}\, V_i} = 1$, $f_i|_{X \setminus U_i} = 0$ であるようなものが存在する。連続写像 $\varphi_i\colon X \to [0,1]$ を

$$\varphi_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^n f_j(x)}$$

で定義すると、$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1,\ \varphi_i(x) \geqq 0$ が各 $x \in X$ に対して成り立つ。そこで写像 $\varphi\colon X \to |N(\mathcal{U})|$ を

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) U_i$$

で定義する。これは実際に $|N(\mathcal{U})|$ への写像になっている。それを示すため $x \in X$ とし、$S = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid x \in U_i\}$ とおく。このとき、S は有限集合で $x \in \bigcap_{i \in S} U_i$ だから、$\sigma = \{U_i \mid i \in S\}$ は $N(\mathcal{U})$ の単体である。ところが、$i \notin S$ のときは $\varphi_i(x) = 0$ であるから、 $\varphi(x) = \sum_{i \in S} \varphi_i(x) U_i$ である。よって、$\varphi(x) \in |\sigma| \subset |N(\mathcal{U})|$ となる。

補題 7.2 により、写像 $\varphi\colon X \to |N(\mathcal{U})|$ は連続である。さらに、$U \in \mathcal{U},\ x \notin U$ であれば、 $f_i(x) = 0$ となるから $\mathrm{pr}_{U_i}(\varphi(x)) = \varphi_i(x) = 0$ である。よって、φ は命題 7.8 の条件 (2) をみたすので、標準写像である。 □

次の定理は後に用いることはないが、標準写像という呼び名をある程度正当化するものであろう。

定理 7.10. X を正規空間、$\mathcal{U}$ を X の有限開被覆とする。このとき、 $\varphi, \psi\colon X \to |N(\mathcal{U})|$ がともに標準写像であれば、φ と ψ はホモトピックである。すなわち、連続写像 $h\colon X \times I \to |N(\mathcal{U})|$ であって、任意の $x \in X$ に対して $h(x,0) = \varphi(x)$, $h(x,1) = \psi(x)$

をみたすものが存在する。実際、そのようなホモトピーが

$$h(x,t) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x) \quad (x \in X,\, t \in I)$$

で与えられる。

証明. 各 x, t に対して、上で定義された $h(x,t)$ が $|N(\mathcal{U})|$ の点であることを証明すればよい。実際、このとき $h\colon X \times I \to |N(\mathcal{U})|$ の連続性は補題 7.2 から保証される。さて、$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ と表すことにし、$x \in X,\, t \in I$ とする。$h(x,t) \in |N(\mathcal{U})|$ を示そう。$S = \{i \in \{1, \ldots, n\} \,|\, x \in U_i\}$ とおき、$\sigma = \{U_i \,|\, i \in S\}$ とおくと、$x \in \bigcap_{i \in S} U_i$ により σ は $N(\mathcal{U})$ の単体である。φ, ψ は標準写像であるから、$\varphi(x), \psi(x) \in |\sigma|$ である（命題 7.8 の条件 (3) を用いる）。よって、

$$h(x,t) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x) \in |\sigma| \subset |K|$$

となる。 □

8 埋め込み定理と一致定理

最初に、この節で用いる距離空間の基本的な用語を復習する。$X = (X,d)$ を距離空間とするとき、部分集合 $A \subset X$ に対して、$\operatorname{diam} A$ は A の**直径 (diameter)** を表す。すなわち、$\operatorname{diam} A = \sup\{d(a,b) \,|\, a, b \in A\}$ である。次に、$\mathcal{U}$ を X の部分集合族とするとき、$\mathcal{U}$ の**メッシュ**を

$$\operatorname{mesh} \mathcal{U} = \sup\{\operatorname{diam} U \,|\, U \in \mathcal{U}\}$$

と定義する[*9]。

また、点 $x \in X$ のまわりの半径 $r > 0$ の開球を $B(x,r)$ で表す。さらに、$\mathcal{U}$ が X の開被覆であるとき、次のような正の数 δ を $\mathcal{U}$ の**ルベーグ数**という：「各 $x \in X$ に対して、$U \in \mathcal{U}$ であって、$B(x,\delta) \subset U$ となるものが存在する。」よく知られているとおり、コンパクト距離空間の任意の開被覆はルベーグ数をもつ。

この節の目標は、次の二つの定理を証明することである。

定理 8.1 (**埋め込み定理**)**.** X を可分距離空間、n を非負整数とする。このとき $\dim X \leqq n$ ならば、X から $\mathbb{R}^{2n+1}$ への埋め込みが存在する。

定理 8.2 (**一致定理**)**.** X を可分距離空間とするとき、$\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = \dim X$ である。

ここで、連続写像 $f\colon X \to Y$ が**埋め込み**（あるいは**中への同相写像**）であるとは、f の終域を像に制限したもの $f\colon X \to f(X)$ が同相写像になることをいう。一致定理と定理 6.4 から、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の被覆次元も n であることが確定する。

---

*9 ここで、$\operatorname{diam} \emptyset = 0,\ \operatorname{mesh} \emptyset = 0$ とする。

定理 8.3 (ユークリッド空間の次元)**.** n を非負整数とするとき、$\operatorname{ind}\mathbb{R}^n = \operatorname{Ind}\mathbb{R}^n = \dim\mathbb{R}^n = \operatorname{ind} I^n = \operatorname{Ind} I^n = \dim I^n = n$ である。

この節の議論の概要は、次のとおりである。まず、$\dim X \leqq n$ なる可分距離空間 X が与えられたとき、X から $\mathbb{R}^{2n+1}$ への連続写像のなす空間に Baire のカテゴリー定理を適用することにより、X から $\mathbb{R}^{2n+1}$ への埋め込みの存在を証明する。その過程で我々は、前節で述べた開被覆の脈体のほかに、「ε 写像」と「一般の位置の議論」を道具に用いるが、これらはすぐ後で説明する。このとき、より強く、X から $\operatorname{ind} N_n^{2n+1} = n$ をみたすある部分集合 $N_n^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ への埋め込みを構成することができる。すると部分空間定理から、$\operatorname{ind} X \leqq n$ である。以上から「$\dim X \leqq n$ ならば $\operatorname{ind} X \leqq n$」が分かるので、$\operatorname{ind} X \leqq \dim X$ が得られる。他方、$\dim X \leqq \operatorname{ind} X$ は、分解定理を用いると比較的簡単に証明できる（命題 8.12)。以上と等式 $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$（系 5.17）により、一致定理の証明が終わる。

8.1 ε 写像

まず、Baire のカテゴリー定理を用いて埋め込みを構成することを念頭に、連続関数の空間の中で埋め込みに近い写像のなす部分集合に注目する。そのために一般的に、次の定義を行う。X を距離空間、Y を位相空間とする。このとき $\varepsilon > 0$ に対して、連続写像 $f\colon X \to Y$ が **ε 写像 (ε-map)** であるとは、任意の点 $y \in f(X)$ に対して、y のある開近傍 V が存在して $\operatorname{diam} f^{-1}(V) < \varepsilon$ が成立することである。

補題 8.4. X を距離空間、Y を位相空間とする。このとき、連続写像 $f\colon X \to Y$ が埋め込みであるためには、任意の $\varepsilon > 0$ に対して f が ε 写像であることが必要十分である。

証明. まず、必要性を示そう。$f\colon X \to Y$ が埋め込みであるとし、$\varepsilon > 0$ とする。このとき f が ε 写像であることを示そう。そのため $y \in f(X)$ とする。f は単射であり $f^{-1}\colon f(X) \to X$ は連続であるから、y の Y における開近傍 V であって、$f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap f(X)) \subset B(f^{-1}(y), \varepsilon/3)$ となるものが存在する。したがって、$\operatorname{diam} f^{-1}(V) \leqq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ である。よって、f は ε 写像である。

次に、十分性を示そう。$f\colon X \to Y$ が任意の $\varepsilon > 0$ に対して ε 写像であることを仮定する。このとき、$f\colon X \to Y$ が埋め込みであることを示そう。まず、f が単射であることを示す。そのため、$x, x' \in X$ とし、$y = f(x) = f(x')$ とする。任意に $\varepsilon > 0$ を与えると、y の開近傍 V であって、$\operatorname{diam} f^{-1}(V) < \varepsilon$ となるものが存在する。このとき、$x, x' \in f^{-1}(V)$ であるから、$d(x, x') < \varepsilon$ である。$\varepsilon > 0$ は任意に取れるから、$x = x'$ でなければならない。よって、f は単射である。あとは、f が X から $f(X)$ への写像として閉写像であることを証明すればよい。そのため、閉集合 $F \subset X$ を任意に与える。$y \in f(X) \setminus f(F)$ とすると、ある $x \in X \setminus F$ に対して、$y = f(x)$ である。$\varepsilon > 0$ を $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus F$ となるように取り、この ε に対して、y の開近傍 V を $\operatorname{diam} f^{-1}(V) < \varepsilon$ となるように取る。このとき、$x \in f^{-1}(V)$ であるから、$f^{-1}(V) \subset B(x, \varepsilon) \subset X \setminus F$ である。これは $V \subset Y \setminus f(F)$ であることを示している。したがって、$V \cap f(X)$ は y の

$f(X)$ における近傍であって、$f(F)$ と交わらないものになっている。これで、f が X から $f(X)$ への閉写像であることが分かった。 □

再び一般的に、X を位相空間、$Y = (Y, d)$ を距離空間とする。このとき、X から Y への有界な連続写像の全体を $C_B(X, Y)$ で表す。ここで、写像 $f\colon X \to Y$ が**有界**であるとは、像 $f(X)$ が Y の有界な部分集合であることをいう。このとき、$C_B(X, Y)$ 上の距離を

$$d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

で定めることができる。このとき (Y, d) が完備であれば、$(C_B(X, Y), d)$ も完備である。

次に、X, Y がともに距離空間である場合を考える。このとき、各 $\varepsilon > 0$ に対して、X から Y への有界な ε 写像の全体を $C_B(X, Y; \varepsilon)$ で表すことにする。すなわち、

$$C_B(X, Y; \varepsilon) = \{f \in C_B(X, Y) \mid f \text{ は } \varepsilon \text{ 写像 }\}$$

とする。このとき次が成り立つ。

補題 8.5. X, Y を距離空間として、Y の任意の有界閉集合がコンパクトであるとする。このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$C_B(X, Y; \varepsilon)$ は $C_B(X, Y)$ の開集合である。

証明. $f \in C_B(X, Y; \varepsilon)$ を任意に与える。$K = \mathrm{Cl}_Y f(X)$ は仮定によりコンパクトである。f は ε 写像であるから、K の開被覆 $\mathcal{U}$ であって、各 $U \in \mathcal{U}$ に対して $\operatorname{diam} f^{-1}(U) < \varepsilon$ となるようなものが存在する。K はコンパクトであるから、$\mathcal{U}$ にはルベーグ数 $\delta > 0$ が存在する。このとき、$B(f, \delta/3) \subset C_B(X, Y; \varepsilon)$ であることを証明しよう。

そこで、$g \in B(f, \delta/3)$ として、$x \in X$ を任意に与える。このとき、

$$\operatorname{diam} g^{-1}(B(g(x), \delta/3)) < \varepsilon \tag{$\star$}$$

が成り立つことを主張する。これが言えれば、g が ε 写像であることが結論され、証明は終わる。$\delta > 0$ は K の開被覆 $\mathcal{U}$ のルベーグ数であったから、$B(f(x), \delta) \cap K \subset U$ となるような $U \in \mathcal{U}$ が存在する。したがって、この U に対して

$$\operatorname{diam} f^{-1}(B(f(x), \delta)) \leqq \operatorname{diam} f^{-1}(U) < \varepsilon$$

である。よって、$(\star)$ を証明するためには、$g^{-1}(B(g(x), \delta/3)) \subset f^{-1}(B(f(x), \delta/3)$ を証明すればよい。この包含関係を示すため、$z \in g^{-1}(B(g(x), \delta/3))$ とすると、

$$\begin{aligned} d(f(z), f(x)) &\leqq d(f(z), g(z)) + d(g(z), g(x)) + d(g(x)), f(x)) \\ &< \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta \end{aligned}$$

となる。これは $z \in f^{-1}(B(f(x), \delta))$ を意味する。 □

8.2　一般の位置の議論

上の議論を $\dim X \leqq n$ なる可分距離空間の埋め込みに適用したい。そのためには、可分距離空間 X を前の節で導入した脈体により多面体で近似を行い、多面体の埋め込みの問題に置き換えて考える。多面体の埋め込みは、「一般の位置の議論」と呼ばれるものが基礎になる。

一般の位置の議論の最も簡単な場合は、$\mathbb{R}^3$ における直線（1 次元アフィン部分空間）の関係についてのものである。$\mathbb{R}^3$ において、2 直線が与えられると、それらを少しずらすことにより、必ず交点をもたないようにできる。一般的に、$\mathbb{R}^{2n+1}$ において、n 次元のアフィン部分空間が 2 個与えられると、それらを少しずらすことで、必ず交点をもたない状態にすることができる。この現象は、$\dim X \leqq n$ なる可分距離空間 X を $\mathbb{R}^{2n+1}$ に埋め込み可能であることの端的な理由であり、厳密な証明におけるキーポイントでもある[*10]。

さて、いくつか定義をしよう。上で断りなく用いた用語であるが、実ベクトル空間 V の空でない部分集合 L が**アフィン部分空間**であるとは、L 上の任意の異なる二点に対して、それらを通る直線が L に含まれること、すなわち、

$$x, y \in L,\, t \in \mathbb{R} \text{ ならば } (1-t)x + ty \in L$$

が成り立つことをいう。v を L 上の任意の点とするとき、$W = L - v = \{x - v\,|x \in L\}$ は V の部分ベクトル空間となる。このとき W は L のみで決まり v の取り方によらない。W の実ベクトル空間としての次元を L の**次元**という。たとえば V の 1 次元アフィン部分空間とは、V 内の直線にほかならない。

実ベクトル空間 V の n 個の元からなる有限部分集合 $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ に対して、F が**アフィン独立**であるとは、

$$\sum_{i=1}^{n} t_i x_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 0 \text{ ならば、すべての } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対して } t_i = 0$$

が成立することである。とくに $F = \emptyset$ すなわち $n = 0$ の場合は、上の条件での結論が自明な意味で常に成立するので、空集合 $\emptyset$ はアフィン独立である。一般に、アフィン独立な集合の部分集合は、再びアフィン独立である。

V の n 個の点からなる（必ずしもアフィン独立でない）有限部分集合 $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ に対して、$v_1, \ldots, v_n$ のアフィン結合、凸結合の全体をそれぞれ $\operatorname{aff} F$, $\operatorname{conv} F$ で表す。

[*10] これに対して、$\mathbb{R}^{2n}$ における 2 個の平行でない n 次元アフィン部分空間には少なくとも 1 個の交点がある。したがって、ここでの次元 $2n+1$ は最良の値である。

すなわち、

$$\operatorname{aff} F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\},$$
$$\operatorname{conv} F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,\, t_i \geqq 0 \right\}$$

とおく。明らかに $\operatorname{conv} F \subset \operatorname{aff} F$ であり、$F = \emptyset$ のときは $\operatorname{aff} F = \operatorname{conv} F = \emptyset$ である。

問題 8.1. $n > 0$ のとき、n 個の点からなる V の有限部分集合 $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ がアフィン独立であることは $n-1$ 個のベクトル $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n$ が一次独立であることと同値である[*11]。

問題 8.2. V のアフィン独立な有限部分集合 F および $x \in V \setminus F$ に対して、$F \cup \{x\}$ がアフィン独立であるためには、$v \notin \operatorname{aff} F$ であることが必要十分である。

問題 8.3. V の任意の n 次元アフィン部分空間 L に対して、$n+1$ 個の元からなるアフィン独立な L の部分集合 F が存在する。さらに、そのような F に対しては常に $\operatorname{aff} F = L$ が成り立つ。

問題 8.4. V の n 個の元からなる部分集合 $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ に対して、次が成り立つ。

(1) $n \geqq 1$ のとき、$\operatorname{aff} F$ は F を含む V の最小のアフィン部分空間である。
(2) F がアフィン独立であれば、$\operatorname{aff} F$ の次元は $n-1$ であり、$\operatorname{aff} F$ の任意の点 x は $x = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ の形に一意的に表される。
(3) F がアフィン独立で、$A, B \subset F$ のとき、$\operatorname{aff}(A \cap B) = \operatorname{aff} A \cap \operatorname{aff} B$ である。とくに、$A \cap B = \emptyset$ であれば、$\operatorname{aff} A \cap \operatorname{aff} B = \emptyset$ である。

V を m 次元実ベクトル空間とするとき、V の部分集合 A が（V において）**一般の位置にある**とは、任意の $m+1$ 個以下の元からなる部分集合 $F \subset A$ に対して、F がアフィン独立であることをいう。直ちに分かるとおり、A が一般の位置にあるとき、A の任意の部分集合も一般の位置にある。

補題 8.6. m, p, q を非負整数、$A = \{x_1, \ldots, x_p\}$ を $\mathbb{R}^m$ の p 個の元からなる部分集合とし、A は一般の位置にあるとする。このとき、任意の $y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{R}^m$ および $\varepsilon > 0$ に対して、$\|y'_j - y_j\| < \varepsilon$ なる $y'_j \in \mathbb{R}^m\ (j = 1, \ldots, q)$ であって、$S = \{x_1, \ldots, x_p, y'_1, \ldots, y'_q\}$ が $p+q$ 個の元からなり、一般の位置にあるようなものが存在する。

ここで、$\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。

証明. $q = 1$ の場合に証明すれば十分である（$q = 0$ の場合は明らかであり、$q \geqq 2$ の場合は、$q = 1$ の場合から帰納法によって導かれる）。そこで、$A = \{x_1, \ldots, x_p\} \subset \mathbb{R}^m$ が

[*11] ここで再び、0 個の点は自明な意味で一次独立であり、したがって 1 点集合は常にアフィン独立であることに注意する。

一般の位置にあるとして、$y_1 \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$ とする。$\mathcal{J}$ を、A の m 個以下の元からなる部分集合全体の集合とする。$\mathcal{J}$ は有限集合であり、各 $J \in \mathcal{J}$ に対して、$\operatorname{aff} J$ は $\mathbb{R}^m$ の $m-1$ 次元以下のアフィン部分空間となる。よって、とくに、$\operatorname{aff} J$ は $\mathbb{R}^m$ において内点のない閉集合である。したがって、その有限和

$$L = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} \operatorname{aff} J$$

もまた、$\mathbb{R}^m$ において内点のない閉集合である。これは、補集合 $\mathbb{R}^m \setminus L$ が $\mathbb{R}^m$ において稠密な開集合であることを意味している。よって、$\|y_1' - y_1\| < \varepsilon$ となるような $y_1' \in \mathbb{R}^m \setminus L$ が存在する。定義から明らかに $A \subset L$ となるので、$y_1' \notin A$ であることに注意する。この y_1' に対して、$S = A \cup \{y_1'\} = \{x_1, \ldots, x_p, y_1'\}$ が一般の位置にあることを示そう。A はすでに一般の位置にあるので、$B \subset A$ が m 個以下の元からなるときに、$B \cup \{y_1'\}$ がアフィン独立であることを示せば十分である。まず、A は一般の位置にあるから、その $m+1$ 個以下（実際には m 個以下）の元からなる部分集合 B はアフィン独立である。また、$B \in \mathcal{J}$ であるから、y_1' の取り方により $y_1' \notin \operatorname{aff} B$ である。よって、問題 8.2 により、$B \cup \{y_1'\}$ はアフィン独立である。 $\square$

多面体と上の補題を関連させよう。K を単体複体とするとき、多面体からユークリッド空間への連続写像 $F\colon |K| \to \mathbb{R}^N$ が K の**アフィン実現**であるとは、各単体 $\sigma = \{v_0, \ldots, v_n\} \in K$ に対して、$\sum_{i=0}^n t_i = 1,\ t_i \geqq 0$ のとき

$$F\left(\sum_{i=0}^{n} t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} t_i F(v_i)$$

が成り立ち、かつ F が埋め込み、すなわち中への同相写像になっていることをいう。アフィン実現 F は K の頂点における値 $F(v)\ (v \in K^{(0)})$ だけから一意的に定まること、すなわち、アフィン実現 F は制限 $F|_{K^{(0)}}$ から決定されることに注意する。

補題 8.7. n を非負整数、K を $\dim K \leqq n$ なる単体複体とする。写像 $f\colon K^{(0)} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ が単射であり、像 $f(K^{(0)})$ が一般の位置にあるならば、f は（一意的な）アフィン実現 $F\colon |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ に拡張できる。

証明. $f\colon K^{(0)} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ に対して補題の仮定が成り立つとする。まず、各単体 $\sigma = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\} \in K$ に対して、$F_\sigma\colon |\sigma| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ を

$$F_\sigma\left(\sum_{i=0}^{k} t_i v_i\right) = \sum_{i=0}^{n} t_i f(v_i)$$

によって定義する。このとき、命題 7.3 (2) により、$F|_{|\sigma|} = F_\sigma$ が各 $\sigma \in K$ に対して成り立つように写像 $F\colon |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ を定義できることが分かる。さらに、命題 7.3 (4) により、F は連続となる。この F は定義から f の拡張になっているので、F がアフィン実現であることが証明できればよい。

そのためには F が埋め込みであると言えればよいが、命題 7.3 (1) で述べたとおり $|K|$ はコンパクトである（単体複体はすべて有限と仮定しているのだった）。したがって、F が単射であることを示せば、F は自動的に埋め込みであることが分かる。

F の単射性を示すため $x, y \in |K|$ とし、$F(x) = F(y) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ であるとする。$x \in |\sigma|$, $y \in |\tau|$ となる $\sigma, \tau \in K$ が存在する。$K^{(0)}$ の部分集合 $\sigma \cup \tau$ の元の個数を k とおき、$\sigma \cup \tau = \{v_1, \ldots, v_k\}$ と書く（$\sigma \cup \tau$ は K の単体であるとは限らない）。いま $\dim K \leqq n$ だから σ, τ の元の個数はどちらも高々 $n+1$ 個で、したがって $k \leqq 2n+2$ である。また、$x = \sum_{i=1}^{k} s_i v_i,\ y = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i,\ \sum_{i=1}^{k} s_i = \sum_{i=1}^{k} t_i = 1,\ s_i \geqq 0,\ t_i \geqq 0$ という形に表すことができる。このとき、F のつくり方と $F(x) = F(y)$ より

$$\sum_{i=1}^{k} s_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{k} t_i f(v_i) \tag{$\star$}$$

である。ところで、$\{f(v_1), \ldots, f(v_k)\}$ はちょうど k 個の元からなる $f(K^{(0)})$ の部分集合である。$f(K^{(0)})$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の一般の位置にある部分集合で、$k \leqq 2n+2$ だから $\{f(v_1), \ldots, f(v_k)\}$ はアフィン独立である。よって、$(\star)$ と問 8.4 (2) により、$s_i = t_i\,(i = 1, 2, \ldots, k)$ が成り立つ。したがって、$x = \sum_{i=1}^{k} s_i v_i = \sum_{i=1}^{k} t_i v_i = y$ である。これで、F の単射性が示された。 □

補題 8.8. n を非負整数、K を $\dim K \leqq n$ なる単体複体、$H \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ を n 次元アフィン部分空間とする。このとき、任意の写像 $f \colon K^{(0)} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ と $\varepsilon > 0$ に対して、K のアフィン実現 $F \colon |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ が存在して、各 $v \in K^{(0)}$ について $\|F(v) - f(v)\| < \varepsilon$ を満たし、かつ $F(|K|) \cap H = \emptyset$ となる。

証明. まず、問題 8.3 から、H の $n+1$ 個の元からなる部分集合 $\{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ をアフィン独立に取ることができ、$\mathrm{aff}\{p_1, \ldots, p_{n+1}\} = H$ となる。

単体複体 K がちょうど N 個の頂点をもつとし、$K^{(0)} = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ と書き表す。写像 $f \colon K^{(0)} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ および $\varepsilon > 0$ を任意に与えると、補題 8.6 によって、$\|q_i - f(v_i)\| < \varepsilon$ となるような点 $q_i \in \mathbb{R}^{2n+1}\,(i = 1, \ldots, N)$ であって、

$$\{p_1, \ldots, p_{n+1}, q_1, \ldots, q_N\} \text{ が } (n+1)+N \text{ 個の元からなり、一般の位置にある} \tag{$\star$}$$

ようなものが存在する。そこで、$f' \colon K^{(0)} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ を $f'(v_i) = q_i\,(i = 1, \ldots, N)$ により定義する。$f'(K^{(0)}) = \{q_1, \ldots, q_N\}$ は一般の位置にあるから、補題 8.7 により、f' はアフィン実現 $F \colon |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ に一意的に拡張できる。すると、$\|F(v_i) - f(v_i)\| < \varepsilon\,(i = 1, \ldots, N)$ である。

あとは、$F(|K|) \cap H = \emptyset$ を示せばよい。そのためには、任意の単体 $\sigma \in K$ に対して、$F(|\sigma|) \cap H = \emptyset$ を示せばよい。そこで $\sigma = \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_m}\} \in K$ を m 単体とする。$\dim K \leqq n$ であるから、$m \leqq n$ である。よって、$\{p_1, \ldots, p_{n+1}, q_{i_0}, \ldots, q_{i_m}\}$ は高々 $2n+2$ 個の点からなるので、$(\star)$ によりアフィン独立である。定義より $F(|\sigma|) = \mathrm{conv}\{q_{i_0}, \ldots, q_{i_m}\}$ となり、他方 $H = \mathrm{aff}\{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ であったから、問題 8.4 (3) に

より、

$$\begin{aligned} F(|K|) \cap H &= \operatorname{conv}\{q_{i_0}, \dots, q_{i_m}\} \cap \operatorname{aff}\{p_1, \dots p_{n+1}\} \\ &\subset \operatorname{aff}\{q_{i_0}, \dots, q_{i_m}\} \cap \operatorname{aff}\{p_1, \dots p_{n+1}\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

となる。 □

8.3 埋め込み定理と一致定理の証明

さて、非負整数 n に対して、$\mathbb{R}^{2n+1}$ の次の部分集合を考えよう。

$$N_n^{2n+1} = \{(x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid x_1, \dots, x_{2n+1} \text{ のうち有理数は高々 } n \text{ 個 }\}$$

命題 8.9. 上で定義された N_n^{2n+1} に対して、$\operatorname{ind} N_n^{2n+1} = n$ が成り立つ。

証明. 例 5.14 の記号を用いると、この集合は 0 次元空間の $n+1$ 個の和として

$$N_n^{2n+1} = \mathbb{Q}_0^{2n+1} \cup \mathbb{Q}_1^{2n+1} \cup \dots \cup \mathbb{Q}_n^{2n+1}$$

と表されるから、加法定理 5.11 を（繰り返し）用いて、$\operatorname{ind} N_n^{2n+1} \leqq n$ が分かる。

次に $\operatorname{ind} N_n^{2n+1} \geqq n$ を示す。$\mathbb{R}^{2n+1}$ の部分集合

$$\{(x_1, \dots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid x_1 = \dots = x_{n+1} = \sqrt{2}\}$$

は N_n^{2n+1} に含まれ、しかも $\mathbb{R}^n$ と同相である。よって、$\operatorname{ind} N_n^{2n+1} \geqq \operatorname{ind} \mathbb{R}^n = n$ である。 □

定理 8.10 (強い埋め込み定理)**.** n を非負整数、X を可分距離空間とする。$\dim X \leqq n$ であれば、X から N_n^{2n+1} のあるコンパクトな部分集合への埋め込みが存在する。しかも、そのような埋め込みの全体は、$C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ の稠密な部分集合をなす。

この結果は、埋め込み定理 8.1 より、はるかに強いことを主張している。$\dim \leqq n$ なる可分距離空間が $\mathbb{R}^{2n+1}$ に埋め込まれるどころか、その部分集合 N_n^{2n+1} のコンパクトな部分集合に埋め込まれ、しかも任意の有界連続写像 $X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ はそのような埋め込みで一様に近似されるというのである。この定理 8.10 の系として、一致定理の一部が導かれる。

系 8.11. 任意の可分距離空間 X に対して、$\operatorname{ind} X \leqq \dim X$ である。

証明. $\dim X = n < \infty$ のときに示せばよい。このとき、定理 8.10 より、X は N_n^{2n+1} のある部分集合に同相である。したがって、部分空間定理 5.1 と命題 8.9 により、$\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{ind} N_n^{2n+1} = n = \dim X$ である。 □

単位閉区間 $I = [0,1]$ の可算積 $I^{\mathbb{N}}$ は、距離 $d((x_i),(y_i)) = \sum_i 2^{-i}|x_i - y_i|$ によってコンパクト距離空間となる。しかも、任意の可分距離空間は $I^{\mathbb{N}}$ のある部分空間と同相となるのであった。このことを踏まえ、定理 8.10 を証明しよう。

強い埋め込み定理 8.10 の証明. X を可分距離空間とし、$\dim X \leqq n$ であるとする。X は単位閉区間の可算積 $I^{\mathbb{N}}$ のある部分空間と同相であるから、$X \subset I^{\mathbb{N}}$ であるとしてよく、X の距離は、上の注意で述べた $I^{\mathbb{N}}$ の距離 d からの制限であるとしてよい。$I^{\mathbb{N}}$ はコンパクトであるから、各整数 $m \geqq 1$ に対して、$I^{\mathbb{N}}$ の有限開被覆 $\tilde{\mathcal{U}}_m$ を $\mathrm{mesh}\tilde{\mathcal{U}}_m < 1/m$ となるように取れる。この開被覆 $\tilde{\mathcal{U}}_m$ の X への制限を $\mathcal{U}_m$ とする。つまり、

$$\mathcal{U}_m = \{\tilde{U} \cap X \,|\, \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}_m\}$$

とする。このとき、もちろん $\mathcal{U}_m$ は X の有限開被覆であり、$\mathrm{mesh}\mathcal{U}_m < 1/m$ となる。

さて、次に、N_n^{2n+1} は $\mathbb{R}^{2n+1}$ から可算個の n 次元アフィン部分空間を取り除いた補集合として得られることに注意しよう。実際、$1 \leqq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leqq 2n+1$ なる整数 $i_1, \ldots, i_{n+1}$ と $r_1, \ldots, r_{n+1} \in \mathbb{Q}$ を用いて

$$\{(x_1, \ldots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1} \,|\, x_{i_k} = r_{i_k} \, (k = 1, \ldots, n+1)\}$$

の形に表される $\mathbb{R}^{2n+1}$ の n 次元アフィン部分空間の全体は可算集合であるから、それを $\{H_m \,|\, m = 1, 2, \ldots\}$ と表すと、定義から分かるように

$$\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m = N_n^{2n+1} \tag{$\clubsuit$}$$

である。

さて、整数 $m \geqq 1$ に対して、$C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ の部分集合

$$E_m = \{f \in C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1}; 1/m) \,|\, \mathrm{Cl}\, f(X) \cap H_m = \emptyset\}$$

を考える。ここで、$\mathrm{Cl}\, f(X)$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ における閉包を表す。

主張 1. E_m は $C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ の開集合である。

主張 1 の証明. $f \in E_m$ とする。f は有界だから、$\mathrm{Cl}\, f(X)$ はコンパクトである。$\mathrm{Cl}\, f(X)$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の閉集合 H_m と交わらないので、正の距離 $\delta_1 = d(\mathrm{Cl}\, f(X), H_m) > 0$ をもつ。一方、補題 8.5 により $C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1}; 1/m)$ は $C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ の開集合である。よって、$B(f, \delta_2) \subset C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1}; 1/m)$ となるような $\delta_2 > 0$ が存在する。$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおけば、$B(f, \delta) \subset E_m$ である。 □

主張 2. E_m は $C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ の稠密な部分集合である。

主張 2 の証明. 任意に $f \in C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ と $\varepsilon > 0$ を与える。f は有界だから、$\mathrm{Cl}\, f(X)$ はコンパクトである。したがって、$\mathrm{Cl}\, f(X)$ の有限開被覆 $\mathcal{V}$ であって、$\mathrm{mesh}\, \mathcal{V} < \varepsilon/3$ となるものが存在する。$\dim X \leqq n$ であるから、X の有限開被覆

$$\{U \cap f^{-1}(V) \,|\, U \in \mathcal{U}_m, \, V \in \mathcal{V}\}$$

を細分するような X の有限開被覆 $\mathcal{W} = \{W_1, \ldots, W_N\}$ であって、$\operatorname{ord}\mathcal{W} \leqq n+1$ となるものが存在する。$\mathcal{W}$ の脈体 $N(\mathcal{W})$ を K とおくと、

(1) $\dim K \leqq n$,
(2) $\operatorname{mesh}\mathcal{W} < 1/m$,
(3) $\operatorname{diam} f(W_j) < \varepsilon/3 \quad (j = 1, \ldots, N)$

である。

各 $j = 1, \ldots, N$ に対して点 $z_j \in W_j$ を固定すると、(1) と補題 8.8 により、アフィン実現 $h\colon |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ であって、

$$\|h(W_j) - f(z_j)\| < \varepsilon/3 \quad (j = 1, \ldots, N)$$

かつ、$h(|K|) \cap H_m = \emptyset$ となるものが存在する。上の式では、W_j を $K = N(\mathcal{W})$ の頂点であると考えて $W_j \in |K|$ であると見なしていることに注意する。

定理 7.9 により存在する標準写像 $\varphi\colon X \to |K|$ を一つ固定して、

$$g = h \circ \varphi\colon X \to \mathbb{R}^{2n+1}$$

とおく。このとき、$g \in E_m$ かつ $d(g, f) < \varepsilon$ となることを証明しよう。

まず $g \in E_m$ であることを証明する。$g = h \circ \varphi$ だから、$g(X) \subset h(|K|)$ である。h は $h(|K|) \cap H_m = \emptyset$ となるように取ったので、$g(X) \cap H_m = \emptyset$ である。次に、g が $1/m$ 写像であることを証明するため、$p \in g(X)$ とする。$x \in X$ であって、$p = g(x) = h(\varphi(x))$ となるようなものを固定する。多面体 $|K|$ の開星状体の全体 $\mathcal{O}_K = \{O_K(W_j) \mid j = 1, \ldots, N\}$ は $|K|$ の開被覆であった。よって、$\varphi(x) \in O_K(W_j)$ となるような $j \in \{1, \ldots, N\}$ が存在する。$h\colon |K| \to \mathbb{R}^{2n+1}$ はアフィン実現、したがって埋め込みであるから、$h^{-1}(V) = O_K(W_j)$ となるような $\mathbb{R}^{2n+1}$ の開集合 V が存在する。この V は $p = h(\varphi(x))$ の開近傍である。このとき、$\operatorname{diam} g^{-1}(V) < 1/m$ である。実際、$\varphi\colon X \to |K|$ は標準写像であるから、$g^{-1}(V) = \varphi^{-1}(h^{-1}(V)) = \varphi^{-1}(O_K(W_j)) \subset W_j$ である。したがって (2) より、$\operatorname{diam} g^{-1}(V) \leqq \operatorname{diam} W_j < 1/m$ である。以上で、$g \in E_m$ であることが示された。

次に $d(g, f) < \varepsilon$ となることを証明するため、任意の $x \in X$ を与える。φ は標準写像なので、命題 7.8 により、$x \in \bigcap_{k=0}^{s} W_{j_k}$ となる $1 \leqq j_1 < \cdots < j_s \leqq N$ および $\sum_{k=0}^{s} t_k = 1$ となる $t_0, \ldots, t_s \geqq 0$ が存在して、$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{s} t_k W_{j_k}$ である。さらに、h は K のアフィン実現であるから、$g(x) = h(\varphi(x)) = \sum_{k=0}^{s} t_k h(W_{j_k})$ である。一方、$x, z_{j_k} \in W_{j_k}\,(k = 1, \ldots, s)$ であるから、(3) より、$d(f(x), f(z_{j_k})) < \varepsilon/3\,(k = 1, \ldots, s)$ である。以上から、

$$\begin{aligned}
\|g(x) - f(x)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{s} t_k \left(h(W_{j_k}) - f(x) \right) \right\| \\
&\leqq \sum_{k=0}^{s} t_k \left\| h(W_{j_k}) - f(z_{j_k}) \right\| + \sum_{k=0}^{s} t_k \|f(z_{j_k}) - f(x)\| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = 2\varepsilon/3
\end{aligned}$$

である。したがって、$d(g,f) \leqq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$ である。以上で、主張 2 の証明が終わった。 $\square$

主張 1 と主張 2 により、E_m は完備距離空間 $C_B(X,\mathbb{R}^{2n+1})$ の稠密な開集合であるから、Baire のカテゴリー定理により、共通部分 $E=\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ は再び $C_B(X,\mathbb{R}^{2n+1})$ の中で稠密である。一方、等式 (♣) と補題 8.4 により、E の任意の元 $f\colon X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ は、$\mathrm{Cl}\, f(X) \subset N_n^{2n+1}$ を満たす埋め込みである。f の有界性より、$\mathrm{Cl}\, f(X)$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の有界閉集合なので、コンパクトである。以上で、X から N_n^{2n+1} のあるコンパクト部分集合への埋め込み全体が、$C_B(X,\mathbb{R}^{2n+1})$ において稠密であることが分かった。とくに、X から $\mathbb{R}^{2n+1}$ への埋め込みが存在することが分かった。 $\square$

これで、強い埋め込み定理の証明、したがってその系 8.11 の証明が完了した。一致定理の証明のために示さなければならない主張で残っているものは、次の命題だけである。

命題 8.12. 任意の可分距離空間 X に対して、$\dim X \leqq \mathrm{ind}\, X$ である。

この命題の証明のためには、次を用いる。

補題 8.13. X を距離空間、$A \subset X$ を部分集合、$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに交わりのない A の開集合の族とする。このとき、互いに交わりのない X の開集合の族 $(\tilde{U}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ であって、$\tilde{U}_\lambda \cap A = U_\lambda\ (\lambda\in\Lambda)$ となるものが存在する。

証明. $\tilde{U}_\lambda = \{x \in X \,|\, d(x,U_\lambda) < d(x, A\setminus U_\lambda)\}$ とおくと、$\tilde{U}_\lambda$ が X の開集合で、$\tilde{U}_\lambda \cap A = U_\lambda$ となることが容易に確かめられる。さらに、$\lambda,\mu\in\Lambda$, $\lambda\neq\mu$ ならば $\tilde{U}_\lambda\cap\tilde{U}_\mu=\emptyset$ である。実際、$\lambda\neq\mu$ かつ $x\in\tilde{U}_\lambda$ とすると、$U_\lambda \subset A\setminus U_\mu$ かつ $U_\mu\subset A\setminus U_\lambda$ なので、

$$d(x,U_\mu) \geqq d(x,A\setminus U_\lambda) > d(x,U_\lambda) \geqq d(x,A\setminus U_\mu)$$

である。これは $x\notin\tilde{U}_\mu$ であることを示している。 $\square$

命題 8.12 の証明. 二つの段階に分けて証明する。

(第 1 段 : $\mathrm{ind}\, X \leqq 0$ の場合) $\mathrm{ind}\, X = -1$ の場合は明らかだから、$\mathrm{ind}\, X = 0$ としてよい。$\mathcal{U}=\{U_i \,|\, i=1,\ldots,m\}$ を X の有限開被覆とする。X は $\mathrm{ind}\, X\leqq 0$ をみたす可分距離空間なので、命題 5.7 より、X の開かつ閉集合からなる可算開基が存在する。したがって、$\mathcal{U}$ を細分するような可算開被覆 $\{B_k \,|\, k=1,2\ldots\}$ であって、各 k に対して B_k が開かつ閉集合であるようなものが存在する。このとき、B_k を $B_k\setminus\bigcup_{l<k}B_l$ に置き換えることで、$k\neq l$ のとき $B_k\cap B_l=\emptyset$ であるようにできる。各 k に対して、$B_k\subset U_{\varphi(k)}$ となるように $\varphi(k)\in\{1,\ldots,n\}$ を選び、

$$V_i = \bigcup_{\varphi(k)=i} B_k \quad (i=1,\ldots,m)$$

とおく。このとき、$\mathcal{V}=\{V_i \,|\, i=1,\ldots,m\}$ は $\mathcal{U}$ を細分し、$\mathrm{ord}\,\mathcal{V}\leqq 1$ である。よって、$\dim X\leqq 0=\mathrm{ind}\, X$ である。

（第 2 段：一般の場合）$\mathrm{ind}\, X = \infty$ の場合は明らかだから、$\mathrm{ind}\, X = n < \infty$ としてよい。X の有限開被覆 $\mathcal{U}$ を任意に与える。分解定理 5.10 により、$\mathrm{ind}\, Z_i \leqq 0$ となる X の部分空間 $Z_i\,(i = 0, 1 \ldots, n)$ であって、$X = Z_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$ となるものが存在する。このとき、前段により $\dim Z_i \leqq 0$ である。$\mathcal{U}_i = \{U \cap Z_i \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ は Z_i の有限開被覆なので、各 i に対して、$\mathcal{U}_i$ を細分する Z_i の有限開被覆 $\mathcal{V}_i = \{V_{ij} \,|\, j = 1, \ldots, k_i\}$ であって、$\mathrm{ord}\, \mathcal{V}_i \leqq 1$ となるものが存在する。補題 8.13 により、X の開集合からなる族 $\tilde{\mathcal{V}}_i = \{\tilde{V}_{ij} \,|\, j = 1, \ldots, k_i\}$ であって、 $\tilde{V}_{ij} \cap Z_i = V_{ij}$ かつ $\mathrm{ord}\, \tilde{\mathcal{V}}_i \leqq 1$ となるものが存在する。$\mathcal{V}_i$ は $\mathcal{U}$ の細分であったから、$\tilde{\mathcal{V}}_i$ も $\mathcal{U}$ の細分となるように取ることができる。このとき、$\tilde{\mathcal{V}} = \bigcup_{i=0}^{n} \tilde{\mathcal{V}}_i$ とおけば、$\tilde{\mathcal{V}}$ は X の開被覆で、$\mathrm{ord}\, \tilde{\mathcal{V}} \leqq n + 1$ を満たし、かつ $\mathcal{U}$ を細分している。これで、$\dim X \leqq n = \mathrm{ind}\, X$ が示された。 □

一致定理 8.2 の証明. 系 5.17 の $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{Ind}\, X$, 系 8.11 の $\mathrm{ind}\, X \leqq \dim X$, および命題 8.12 の $\dim X \leqq \mathrm{ind}\, X$ を合わせればよい。 □

強い埋め込み定理 8.10 は、一致定理（実際には命題 8.12）により、小さな帰納的次元 ind の言葉で述べることができる。

定理 8.14 (**強い埋め込み定理**)**.** n を非負整数、X を可分距離空間とする。$\mathrm{ind}\, X \leqq n$ であれば、X から N_n^{2n+1} のあるコンパクトな部分集合への埋め込みが存在する。しかも、そのような埋め込みの全体は、$C_B(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ の稠密な部分集合をなす。 □

系 8.15 (**コンパクト化定理**)**.** 任意の可分距離空間 X に対して、$\mathrm{ind}\, X = \mathrm{ind}\, \tilde{X}$ なる距離付け可能なコンパクト化 $\tilde{X}$ が存在する。

証明. まず、$\mathrm{ind}\, X = n < \infty$ の場合を考える。このとき、ind に関する強い埋め込み定理 8.14 により、X は N_n^{2n+1} のあるコンパクト部分集合 K に埋め込まれる。そこで、X を K の部分空間と同一視して、$\tilde{X} = \mathrm{Cl}_K\, X$ とおけば、$\tilde{X}$ は X の距離付け可能なコンパクト化で、$\mathrm{ind}\, \tilde{X} \leqq \mathrm{ind}\, N_n^{2n+1} = n = \mathrm{ind}\, X \leqq \mathrm{ind}\, \tilde{X}$ である。よって、$\mathrm{ind}\, X = \mathrm{ind}\, \tilde{X}$ である。

次に $\mathrm{ind}\, X = \infty$ の場合を考える。この場合、X の任意の距離付け可能なコンパクト化 $\tilde{X}$ に対して、$\infty = \mathrm{ind}\, X \leqq \mathrm{ind}\, \tilde{X} \leqq \infty$ だから $\mathrm{ind}\, X = \mathrm{ind}\, \tilde{X}$ である。ところが、そのようなコンパクト化 $\tilde{X}$ は存在する。実際、X は可分距離空間なので、コンパクト距離空間 $I^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれる。X の $I^{\mathbb{N}}$ における閉包を $\tilde{X}$ とすればよい。 □

$\mathbb{R}^{2n+1}$ の点のうち高々 n 個の座標が有理数であるもの全体のなす部分空間 N_n^{2n+1} は、それ自身が n 次元の可分距離空間（これは一致定理により、ind, Ind, dim のどの意味でもよい！）であり、かつ任意の n 次元以下の可分距離空間が N_n^{2n+1} に埋め込まれるという性質をもつ。この事実をさして、「N_n^{2n+1} は n 次元以下の可分距離空間のクラスに対する**普遍空間 (universal space)** である」という。N_n^{2n+1} はその発見者の名前を取って、**Nöbeling の n 次元普遍空間**と呼ばれている。

9　球面への写像と被覆次元

前節までは、可分距離空間の次元論を中心に解説した。この節では、正規空間に範囲を広げて被覆次元について考察する。正規空間は、パラコンパクト Hausdorff 空間という非常に大きなクラスを含んでいる。たとえば、距離空間と CW 複体はすべてパラコンパクト Hausdorff であることが知られている。多様体にも、通常はこのパラコンパクト性が仮定されている。もちろん、コンパクト Hausdorff ならばパラコンパクト Hausdorff で、正規空間となる。よって、例えば単位閉区間を任意個直積したものは正規空間である。

以下、S^n は n 次元球面、D^n は n 次元球体を表す。すなわち、

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$
$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$$

とする。とくに $S^0 = \{1, -1\}$, $D^0 = \{0\}$ である。

位相空間 X の部分集合 A に対して、連続写像 $f\colon A \to Y$ が X 上に**拡張できる**とは、連続写像 $\tilde{f}\colon X \to Y$ であって $\tilde{f}|_A = f$ となるものが存在することである。このような $\tilde{f}$ を連続写像 f の**拡張**という。

この節の目標は、被覆次元の次の特徴づけを証明することである。

定理 9.1 (球面への写像の拡張と被覆次元の関係)**.** X を正規空間、n を非負整数とするとき、次の条件は同値である。

(1) $\dim X \leqq n$ である。
(2) X の任意の閉集合 A と連続写像 $f\colon A \to S^n$ に対して、f は X 上に拡張できる。
(3) 任意の $k \geqq n$ および X の任意の閉集合 A と連続写像 $f\colon A \to S^k$ に対して、f は X 上に拡張できる。

ここでも、証明の基本的なアイディアは、考えている空間 X を脈体で近似し、多面体の場合に帰着させることである。この状況では、次のように S^n を多面体と考えるのが便利である。$T = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ を $n+2$ 個の元からなる集合としよう（たとえば $v_0 = 0, \ldots, v_{n+1} = n+1$ とするとよい)。$K(S^n)$ を T の部分集合であって、空集合でも T でもないもの全体とする。つまり、

$$K(S^n) = \mathcal{P}(T) \setminus \{\emptyset, T\}$$

とする。ここで、$\mathcal{P}(T)$ は T のベキ集合である。$K(S^n)$ は T の $n+1$ 個以下の元からなる空でない部分集合の全体と言ってもよい。この $K(S^n)$ は単体複体であり、$|K(S^n)|$ は S^n と同相となる。

また、$K(D^{n+1})$ を

$$K(D^{n+1}) = \mathcal{P}(T) \setminus \{\emptyset\}$$

で定義すると、$K(D^{n+1})$ も単体複体で、$K(S^n)$ を部分複体にもつ。さらに、位相空間の対として $(|K(D^{n+1})|, |K(S^n)|)$ は (D^{n+1}, S^n) と同相となる。

定理 9.1 の「単体複体バージョン」は簡単に証明できる。これは読者への問としたい。

問題 9.1. K を単体複体とするとき、以下は同値である。

(1) $\dim K \leqq n$ である。
(2) K の任意の部分複体 L に対して、任意の単体写像 $f\colon L \to K(S^n)$ はある単体写像 $\tilde{f}\colon K \to K(S^n)$ に拡張できる。
(3) 任意の $k \geqq n$ および K の部分複体 L に対して、任意の単体写像 $f\colon L \to K(S^k)$ はある単体写像 $\tilde{f}\colon K \to K(S^k)$ に拡張できる。

単体複体と一般の正規空間との間のギャップを埋めるためには、Tietze の拡張定理と、これから派生するホモトピー拡張定理が重要である。次にこの点に関して説明しよう。

9.1 Tietze の拡張定理と球面

正規空間については、連続写像の拡張について、次の基本的な定理が成り立つのであった。

定理 9.2 (Tietze の拡張定理). 正規空間 X の任意の閉集合 A に対して、A から単位閉区間への任意の連続写像 $f\colon A \to I$ は X 上に拡張できる。 □

系 9.3. n を非負整数とするとき、正規空間 X の任意の閉集合 A に対して、任意の連続写像 $f\colon A \to I^n$ は X 上に拡張できる。

証明. Tietze の拡張定理 9.2 を、座標ごとに適用すればよい。 □

これから、球面 S^n への写像についても、次のような「近傍拡張定理」が成り立つことが分かる。

定理 9.4. X を正規空間、A を X の閉集合、$f\colon A \to S^n$ を連続写像とする。このとき、A の X における開近傍 U が存在して、f は U 上に拡張できる。

証明. まず、$S^n \subset D^{n+1}$ であり、D^{n+1} は I^{n+1} と同相であるから、系 9.3 により、f を D^{n+1} への写像とみたものは、X への拡張 $F\colon X \to D^{n+1}$ をもつ。ところで、$V = D^{n+1} \setminus \{0\}$ を考えると V は S^n の D^{n+1} における開近傍である。さらに、$r\colon V \to S^n$ を $v(x) = x/\|x\|$ で定めると、r はレトラクションである。すなわち、r は連続写像で、$r|_{S^n} = \mathrm{id}_{S^n}$ を満たす。$U = F^{-1}(V)$ とおくと、U は A の X における開近傍である。$F(U) \subset V$ だから $F|_U$ を V への写像と考えると、合成 $\tilde{f} = r \circ (F|_U)\colon U \to S^n$ は $f\colon A \to S^n$ の拡張を与える。 □

注意 9.5. この命題の内容を、S^n は正規空間（のクラス）に対する**絶対近傍拡張手 (absolute neighborhood extensor, ANE)** であると言い表す。 実は、任意の有限単体複体 K に対して、多面体 $|K|$ は正規空間に対する ANE であることが知られている。

上の証明の議論から、空間が正規であることを仮定しなくても、次の近傍拡張定理が成

り立つ。

定理 9.6. 位相空間 X の部分集合 A 上で定義された連続写像 $f\colon A\to S^n$ に対して、f を D^{n+1} への写像とみたものが X 上に拡張 $X\to D^{n+1}$ をもつとする。このとき、A の X における開近傍 U が存在して、f は S^n に値をとる U 上への拡張 $\tilde{f}\colon U\to S^n$ をもつ。 □

9.2 ホモトピー拡張定理

連続写像 $h\colon X\times I\to Y$ のことを**ホモトピー**というのであった。ホモトピー $h\colon X\times I\to Y$ と $t\in I$ に対して、$x\mapsto h(x,t)$ によって定義される連続写像を $h_t\colon X\to Y$ で表す。二つの連続写像 $f,g\colon X\to Y$ が（Y において）**ホモトピック**であるとは、$h_0=f,\ h_1=g$ となるホモトピー $h\colon X\times I\to Y$ が存在することをいい、このとき $f\simeq g\colon X\to Y$ と書くのであった。

一般に、位相空間 X とその閉部分集合 A のなす対 (X,A) が位相空間 Y に対して**ホモトピー拡張性質**をもつとは、次が成り立つことをいう。

> 任意の連続写像 $F\colon (X\times\{0\})\cup(A\times I)\to Y$ は $X\times I$ 上への拡張 $\tilde{F}\colon X\times I\to Y$ をもつ。

これをホモトピーの言葉で述べると、次の通りである。

> $h\colon A\times I\to Y$ をホモトピーとし、h_0 の拡張 $f\colon X\to Y$ が与えられているとする。このとき、$\tilde{h}_0=f$ をみたすホモトピー $\tilde{h}\colon X\times I\to Y$ であって、h の拡張となる（すなわち、各 $t\in I$ に対して、$\tilde{h}_t$ が h_t の拡張となる）ものが存在する。

ホモトピー拡張性質は、連続写像の拡張を考えるのに非常に便利な性質である。それは次の命題から見てとることができる。

命題 9.7. 位相空間とその閉集合のなす対 (X,A) が Y に対してホモトピー拡張性質をもつとする。このとき、二つの連続写像 $f,g\colon A\to Y$ がホモトピックであれば、f が X 上に拡張をもつとき、かつそのときに限り g は X 上に拡張をもつ。

証明. $h\colon A\times I\to Y$ を $h_0=f, h_1=g$ なるホモトピーとし、f が X 上に拡張 $\tilde{f}\colon X\to Y$ をもつとする。このとき、ホモトピー拡張性質により、h の拡張であるホモトピー $\tilde{h}\colon X\times I\to Y$ であって、$\tilde{h}_0=\tilde{f}$ をみたすものが存在する。このとき、$\tilde{h}_1|_A=h_1=g$ であるから、$\tilde{h}_1$ が g の拡張を与えている。逆もまったく同様である。 □

ホモトピー拡張性質が成り立つ理由は多くの場合、定義域の対 (X,A) の性質か、終域 Y の性質か、どちらか一方だけから説明できる。前者の場合で有名なのは Y がどんな位相空間であっても、(X,A) が Y に対してホモトピー拡張性質をもつ場合であり、X が CW 複体で A がその部分複体である場合などが該当する。このときの包含写像 $i\colon A\to X$ は**コファイブレーション (cofibration)** とよばれ、代数的トポロジーで重要

である。

以下で重要になるのは、後者の場合、すなわち Y のもつ性質によりホモトピー拡張性質が成り立つ場合である。ここでは終域 Y が球面 S^n である場合について述べる。

定理 9.8. X を正規空間、A をその閉集合とする。このとき、もし $X \times I$ が正規であれば、(X, A) は S^n に対してホモトピー拡張性質をもつ。すなわち、任意の連続写像 $F\colon (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to S^n$ に対して、F の $X \times I$ 上への拡張が存在する。

証明. 簡単のため、$L = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ とおく。連続写像 $F\colon L \to S^n$ を任意に与える。$X \times I$ は正規であるとしており、L はその閉集合であるから、定理 9.4 によって L の $X \times I$ におけるある開近傍 U に対して、F の U 上への拡張 $\bar{F}\colon U \to Y$ が存在する。このとき、I のコンパクト性より、射影 $\mathrm{pr}_X\colon X \times I \to X$ は閉写像であるから、$V = X \setminus \mathrm{pr}_X((X \times I) \setminus U)$ は X の開集合である。しかも、容易に分かる通り、$A \subset V$ かつ $V \times I \subset U$ である。

X は正規であるから、Urysohn の補題により、連続写像 $\alpha\colon X \to I$ であって $\alpha|_A = 1$, $\alpha|_{X \setminus V} = 0$ となるようなものが存在する。このとき、任意の $x \in X,\ t \in I$ に対して $(x, t\alpha(x)) \in (X \times \{0\}) \cup (V \times I) \subset U$ である。よって、連続写像 $\tilde{F}\colon X \times I \to Y$ を $\tilde{F}(x,t) = \bar{F}(x, t\alpha(x))$ で定義できる。$\tilde{F}$ は確かに F の拡張である。 □

注意 9.9. $X \times I$ が正規でないような正規空間 X が存在することが知られている。このような X を **Dowker 空間**といい、最初に構成された例は 1971 年の Rudin によるものである。また 1996 年には Balogh が連続体濃度の Dowker 空間を構成した。ただ、これらの例にはいずれも集合論的予備知識が必要であり、本稿で述べることはできない。

しかし、1975 年の森田紀一の結果により、上の定理 9.8 は $X \times I$ が正規であるという仮定を外しても、X 自体が正規なら成り立つことが分かった。ただ、その証明は元々の定理 9.8 よりもずっと難しく、やはり本稿の範囲を超える。以下の議論でこの結果を用いることはない。

注意 9.10. 注意 9.5 の用語を用いると、定理 9.8 の主張は、終域が S^n でなくても正規空間のクラスに対する ANE であれば成り立つ。たとえば、有限単体複体 K の多面体 $|K|$ であっても成り立つ。

X の正規性よりも強く、X がパラコンパクト Hausdorff であることを仮定すれば、$X \times I$ は正規となる。実際、$X \times I$ はパラコンパクトである。これは、一般にパラコンパクト空間とコンパクト空間の積がパラコンパクトであることによる[*12]。よって、次の系を得る。

[*12] 実際、X をパラコンパクト、K をコンパクトとして、$\mathcal{W} = \{U_\lambda \times V_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を $X \times K$ の開被覆とする。各 $x \in X$ に対して、K のコンパクト性により、$\{x\} \times K \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{\lambda(x,i)} \times V_{\lambda(x,i)}$ となるような $\lambda(x,1), \ldots, \lambda(x, n_x) \in \Lambda$ を選ぶことができる。$U_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{\lambda(x,i)}$ は x の開近傍である。X の開被覆 $\{U_x \mid x \in X\}$ を細分する局所有限な開被覆 $\{U'_\mu \mid \mu \in M\}$ を取り、各 $\mu \in M$ に対して、$U'_\mu \subset U_{x(\mu)}$ となるような $x(\mu) \in X$ を選ぶ。$\mathcal{W}' = \{U'_\mu \times V_{\lambda(x(\mu),i)} \mid \mu \in M,\, i = 1, \ldots, n_{x(\mu)}\}$ は $\mathcal{W}$ を細分する局所有限開被覆である。

系 9.11. X をパラコンパクト Hausdorff 空間、A をその閉集合とすると、(X, A) は S^n に対してホモトピー拡張性質をもつ。 □

上の注意で述べた $X \times I$ が正規でない場合にも、次のことが成り立つ。

定理 9.12. X が正規空間､A をその閉集合とする。連続写像 $F\colon (X\times\{0\})\cup(A\times I) \to S^n$ に対して、F を D^{n+1} への写像とみなすと $X \times I$ への拡張 $\tilde{F}'\colon X \times I \to D^{n+1}$ が存在すると仮定する。このとき、S^n への写像としての拡張 $\tilde{F}\colon X \times I \to S^n$ も存在する。

証明. 定理 9.6 により、$(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ の $X \times I$ におけるある開近傍 U に対して、F の U 上への拡張 $\bar{F}\colon U \to S^n$ が存在する。あとは定理 9.8 の証明と全く同じ議論により、F の拡張 $\tilde{F}\colon X \times I \to S^n$ が構成される。 □

9.3 定理 9.1 の証明

定理 9.1 の証明. (1) $\Rightarrow$ (2):S^n のかわりに多面体 $|K(S^n)|$ を用いて考える。$\dim X \leqq n$ であるような正規空間 X の閉集合 A 上で、連続写像 $f\colon A \to |K(S^n)|$ が与えられているとする。$K(S^n)$ における開星状体 $O_{K(S^n)}(v_i)\,(i = 0, 1, \dots, n+1)$ を簡単に $O(v_i)$ と書く。

各 i に対して X の開集合 U_i を $U_i \cap A = f^{-1}(O(v_i))$ となるように選ぶ。すると、

$$\mathcal{U} = \{X \setminus A\} \cup \{U_i \,|\, i = 0, 1, \dots, n+1\}$$

は X の有限開被覆である。$\dim X \leqq n$ により､$\mathcal{U}$ を細分する X の有限開被覆 $\mathcal{V}$ であって、$\operatorname{ord}\mathcal{V} \leqq n+1$ となるものが存在する。そこで、脈体への標準写像 $\varphi\colon X \to |N(\mathcal{V})|$ を取る。各 $V \in \mathcal{V}$ に対して、$i(V) \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ を $V \subset U_{i(V)}$ となるように選ぶと、単体写像 $g\colon N(\mathcal{V}) \to K(S^n)$ が $g(V) = v_{i(V)}$ で定義される。実際、$\operatorname{ord}\mathcal{V} \leqq n+1$ だから各単体 $\sigma \in N(\mathcal{V})$ の頂点は $n+1$ 個以下、よって像 $g(\sigma)$ も頂点を高々 $n+1$ 個しかもたないので、$g(\sigma)$ は $K(S^n)$ の単体になっている。

$|g|\colon |N(\mathcal{V})| \to |K(S^n)|$ を、単体写像 g に対応する連続写像とする。このとき、合成 $h = |g| \circ \varphi\colon X \to |K(S^n)|$ を考えると、次が成り立つ。

主張 1. 任意の $x \in A$ に対して、$\sigma \in K(S^n)$ が存在して、任意の $t \in I$ に対して $(1-t)h(x) + tf(x) \in |\sigma|$ となる。

主張 1 の証明. $x \in A$ を任意に与える。

$$\sigma = \{v \in \{v_0, v_1, \dots, v_{n+2}\} \,|\, x \in f^{-1}(O(v))\}$$

とおけば、$f(x) \in \bigcap_{v\in\sigma} O(v)$ となるから、命題 7.4 により、$\sigma \in K(S^n)$ である。この単体 σ に対して、$v_i \notin \sigma$ ならば $f(x) \notin O(v_i)$、すなわち $\mathrm{pr}_{v_i}(f(x)) = 0$ である。よって、$f(x) \in |\sigma|$ である。次に、φ は標準写像であるから、命題 7.8 (3) により、$x \in \bigcap_{j=0}^{m} V_j$

となる $V_0, V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{V}$ が存在して、$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} t_j V_j$ と凸結合で表される。このとき、

$$h(x) = |g|(\varphi(x)) = \sum_{j=0}^{m} t_j g(V_j) = \sum_{j=0}^{m} t_j v_{i(j)}$$

である。ところが、各 $j = 0, 1, \ldots, m$ に対して $x \in V_j \cap A \subset U_{i(j)} \cap A = f^{-1}(O(v_{i(j)}))$ であるから、$v_{i(j)} \in \sigma$ である。したがって、$h(x) \in |\sigma|$ となる。以上から、$f(x), h(x) \in |\sigma|$ となるから、各 $t \in I$ に対して $(1-t)h(x) + tf(x) \in |K(S^n)|$ である。 □

主張 1 により、連続写像 $F\colon (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to |K(S^n)|$ が、次で定義される。

$$F(x,t) = \begin{cases} h(x) & x \in X,\ t = 0 \text{ のとき} \\ (1-t)h(x) + tf(x) & x \in A \text{ のとき} \end{cases}$$

主張 2. F は $X \times I$ 上への拡張 $\tilde{F}\colon X \times I \to |K(S^n)|$ をもつ。

主張 2 の証明. $X \times I$ が正規であるときは、定理 9.8 により F はある $\tilde{F}\colon X \times I \to |K(S^n)|$ に拡張される。一般の場合は次のように考える。まず、X は正規であって $|K(D^{n+1})|$ は I^{n+1} と同相だから、$f\colon A \to |K(S^n)|$ を $|K(D^{n+1})|$ への写像と考えれば、系 9.3 より、f はある $\tilde{f}\colon X \to |K(D^{n+1})|$ へと拡張できる。次に、$|K(D^{n+1})|$ は凸集合だから、連続写像 $\bar{F}\colon X \times I \to |K(D^{n+1})|$ を

$$\bar{F}(x,t) = (1-t)h(x) + t\tilde{f}(x)$$

で定義できる。これは、$|K(D^{n+1})|$ への写像としての F の拡張を与えている。よって、定理 9.12 により、$|K(S^n)|$ への写像としての F の拡張 $\tilde{F}\colon X \times I \to |K(S^n)|$ も存在する。 □

主張 2 により存在する拡張 $\tilde{F}\colon X \times I \to |K(S^n)|$ に対して、$\tilde{F}_1\colon X \to |K(S^n)|$ は $f\colon A \to |K(S^n)|$ の拡張を与える。これが示したいことであった。

(2) ⇒ (3) : (2) を仮定し、(3) を $k(\geqq n)$ に関する帰納法で証明する。$k = n$ のときは、(3) は (2) と全く同じである。そこで $k > n$ として、$k-1$ に対して (3) が示されていると仮定しよう。S^k を北半球 D^k_+ と南半球 D^k_- に分割する。つまり、

$$D^k_\pm = \{(x_0, x_1, \ldots, x_k) \in S^k \mid \pm x_k \geqq 0\}$$

とおく。もちろん、D^k_+, D^k_- はともに D^k と、したがって I^k と同相である。また、自然な同一視

$$D^k_+ \cap D^k_- = S^{k-1}$$

がある。さて、正規空間 X とその閉集合 A および連続写像 $f\colon A \to S^k$ を任意に与える。まず、$U_\pm \cap A = f^{-1}(S^k \setminus D^k_\mp)$ となる X の開集合 $U_\pm$ を選ぶ。このとき、$U_+ \cap U_- = \emptyset$ となるようにできる（U_- を $U_- \setminus \mathrm{Cl}_X U_+$ におきかえればよい）。そこで、

$$X_0 = X \setminus (U_+ \cup U_-), \quad A_0 = X_0 \cap A = f^{-1}(S^{k-1})$$

とおくと、A_0 は X_0 に含まれる X の閉集合となり、しかも $f|_{A_0}$ は S^{k-1} への写像 $f|_{A_0}\colon A_0 \to S^{k-1}$ とみなせる。よって、帰納法の仮定により、$f|_{A_0}$ はある $\tilde{f}_0\colon X_0 \to S^{k-1}$ に拡張できる。さらに、X の閉集合 X_+, X_- と A の閉集合 A_+, A_- を

$$X_\pm = X \setminus U_\mp, \quad A_\pm = X_\pm \cap A = f^{-1}(D^k_\pm)$$

で定める。すると、$A_\pm \cap X_0 = A_0$, $X_+ \cap X_- = X_0$ である。連続写像 $\tilde{f}'_\pm\colon A_\pm \cup X_0 \to D^k_\pm$ を $\tilde{f}'_\pm|_{A_\pm} = f|_{A_\pm}$, $\tilde{f}'_\pm|_{X_0} = \tilde{f}_0$ で定める。$D^k_\pm$ が I^k と同相なことから、系 9.3 により、$\tilde{f}'_\pm$ は $\tilde{f}_\pm\colon X_\pm \to D^k_\pm \subset S^k$ に拡張できる。最後に、連続写像 $\tilde{f}\colon X \to S^k$ を $\tilde{f}|_{X_\pm} = \tilde{f}_\pm$ で定義すれば、$\tilde{f}$ は $f\colon A \to S^k$ の拡張である。

(3) $\Rightarrow$ (1) : (3) を仮定し、X の有限開被覆 $\mathcal{U}$ を任意に与える。$K = N(\mathcal{U})$ とおき、標準写像 $\varphi\colon X \to |K|$ を一つ固定する。各 $i \geqq 0$ に対して、K の i 骨格 $K^{(i)}$ を考える（§7.1 を参照）。このとき、K は有限単体複体であるから、ある整数 $m \geqq n$ に対して $\varphi(X) \subset |K^{(m)}|$ である。この m に関する帰納法で、$\operatorname{ord}\mathcal{V} \leqq n+1$ を満たし $\mathcal{U}$ を細分する X の有限開被覆 $\mathcal{V}$ が存在することを証明しよう。

まず、$m = n$ の場合を考える。このときは、$K^{(n)}$ の開星状体の全体

$$\mathcal{O}_{K^{(n)}} = \{O(U, K^{(n)}) \,|\, U \in \mathcal{U}\}$$

が $|K^{(n)}|$ の開被覆を与え、$\operatorname{ord}\mathcal{O}_{K^{(n)}} \leqq n+1$ である。したがって、その φ による引き戻しとして得られる X の開被覆

$$\mathcal{V} = \{\varphi^{-1}(O(U, K^{(n)})) \,|\, U \in \mathcal{U}\}$$

は再び $\operatorname{ord}\mathcal{V} \leqq n+1$ を満たす。しかも、$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}$ の細分である。実際、φ が標準写像であることの定義から

$$\varphi^{-1}(O(U, K^{(n)})) \subset \varphi^{-1}(O(U, K)) \subset U$$

である。

次に、$m > n$ とし、$m-1$ 以下では証明が済んでいるものとする。K の m 次元単体が N 個あるとし、その全体を $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N\}$ とすると、

$$|K^{(m)}| = |K^{(m-1)}| \cup \bigcup_{i=1}^{N} |\tau_i|, \qquad |\tau_i| \cap |K^{(m-1)}| = \partial|\tau_i|,$$

かつ、$i \neq j$ のとき $|\tau_i| \cap |\tau_j| \subset \partial|\tau_i| \cap \partial|\tau_j|$ であることに注意する。ここで $\partial|\tau_i|$ は $|\tau_i|$ の境界である（§7.1 を参照）。

そこで、$X' = \varphi^{-1}(|K^{(m-1)}|)$, $X_i = \varphi^{-1}(|\tau_i|)$, $A_i = \varphi^{-1}(\partial|\tau_i|)\,(i = 1, \ldots, N)$ とおく。 すると、上の式に対応して

$$X = X' \cup \bigcup_{i=1}^{N} X_i, \quad X_i \cap X' = A_i,$$

かつ、$i \neq j$ のとき $X_i \cap X_j \subset A_i \cap A_j$ である。$\partial|\tau_i|$ は S^{m-1} と同相で、$m-1 \geqq n$ であるから、仮定 (3) より、各 i に対して $\varphi|_{A_i} \colon A_i \to \partial|\tau_i|$ は $\varphi_i \colon X_i \to \partial|\tau_i|$ に拡張できる。これを用いて、連続写像 $\psi \colon X \to |K^{(m-1)}| \subset |K|$ を $\psi|_{X'} = \varphi|_{X'}$, $\psi|_{X_i} = \varphi_i$ で定義する。この $\psi \colon X \to |K|$ は標準写像である。実際、$x \in X$ とすると、φ が標準写像であることから命題 7.8 (3) により、$x \in \bigcap_{i=0}^{k} U_i$ となる $U_0, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ が存在して、$\varphi(x)$ は $U_0, U_1, \ldots, U_k$ の凸結合で表される。このとき、ψ の定め方から、$\psi(x)$ も $U_0, U_1, \ldots, U_k$ の凸結合で表される。よって、再び命題 7.8 (3) により、ψ は標準写像となる。$\psi(X) \subset |K^{(m-1)}|$ であるから帰納法の仮定より、$\mathcal{U}$ は $\operatorname{ord} \mathcal{V} \leqq n+1$ をみたすある有限開被覆 $\mathcal{V}$ によって細分される。これで、$\dim X \leqq n$ すなわち (1) が証明された。 $\square$

上の定理 9.1 の証明の (3) $\Rightarrow$ (1) の議論、および標準写像のホモトピーを除いての一意性（定理 7.10）を用いて、次のことが証明できる。これは、CW 複体の間の写像に関する胞体近似定理の類似ということができる。

問題 9.2. X を $\dim X \leqq n$ なる正規空間、K を有限単体複体とするとき、任意の連続写像 $f \colon X \to |K|$ はある連続写像 $g \colon X \to |K^{(n)}|$ にホモトピックである。このとき、ホモトピーは $f^{-1}(|K^{(n)}|)$ をとめるものが取れる。