コンパクト開位相をめぐって

yamyamtopo

0　はじめに

連続写像の空間に導入される位相として、コンパクト開位相というものがよく用いられます。しかし、位相を学び始めの人にとって、この位相の定義は決して扱いやすいものではないでしょう。また、写像空間の位相としてコンパクト開位相を用いることの必然性もほとんど入門書では説明されていないように思えます。そこで、本稿では

- 写像空間の位相として、コンパクト開位相を用いるべきである根拠となる事実
- コンパクト開位相を実際に扱うために必要な基本的事実

などについてまとめたいと思います。

1　なぜ、コンパクト開位相なのか

本稿では位相空間に特別の分離公理を仮定しない。コンパクト性の定義には Hausdorff 性を含めない。I は単位閉区間 $[0,1]$ を表すとし、$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ とする。

1.1　写像空間の proper, admissible な位相とコンパクト開位相

集合 X,Y に対して、X から Y への写像全体の集合を Y^X と表す。このとき、集合 X,Y,Z について自然な全単射

$$\begin{array}{ccc} Y^{Z\times X} & \cong & (Y^X)^Z \\ f & \mapsto & \hat{f} \\ \check{g} & \mapsfrom & g \end{array} \tag{$\star$}$$

がある。ここで、$\hat{f}\colon Z\to Y^X$ は $\hat{f}(z)(x)=f(z,x)$ により、$\check{g}\colon Z\times X\to Y$ は $\check{g}(z,x)=g(z)(x)$ により定義される。さて、ここで X,Y,Z が位相空間であり、かつ X から Y への連続写像全体の集合 $C(X,Y)$ にも位相 $\mathcal{O}$ が与えられているならば、$Y^{Z\times X}, (Y^X)^Z$ の

元のうち連続写像全体のなす部分集合

$$C(Z \times X, Y) \subset Y^{Z\times X}, \qquad C(Z, C_{\mathcal{O}}(X,Y)) \subset (Y^X)^Z$$

を考えることができる。ここで、$C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ は $C(X,Y)$ に位相 $\mathcal{O}$ を与えたものを表す。このとき、全単射 $(\star)$ を制限することによって、連続写像の集合の間にも全単射

$$C(Z \times X, Y) \cong C(Z, C_{\mathcal{O}}(X,Y)) \tag{$\star\star$}$$

が得られていると好都合である。このような全単射が得られることは、もちろん、$f\colon Z \times X \to Y$ が連続ならば $\hat{f}\colon Z \to C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ が連続であり、かつ、$g\colon Z \to C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ が連続ならば $\check{g}\colon Z \times X \to Y$ が連続であることと同値である。そこで、次のように定義しよう。

定義 1.1. X, Y を位相空間、$\mathcal{O}$ を $C(X,Y)$ 上の位相とする。

(1) [Arens-Dugundji 1951] 位相 $\mathcal{O}$ が **proper** であるとは、任意の位相空間 Z に対して、$f\colon Z \times X \to Y$ が連続ならば $\hat{f}\colon Z \to C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ も連続であることをいう。
(2) [Arens 1946-1] 位相 $\mathcal{O}$ が **admissible** であるとは、任意の位相空間 Z に対して、$g\colon Z \to C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ が連続ならば $\check{g}\colon Z \times X \to Y$ も連続であることをいう。

もちろん、$\mathcal{O}$ が proper かつ admissible であることは、任意の Z に対して全単射 $(\star\star)$ が存在することと同値である。

次の命題が示すように、admissible な位相の定義は、任意の位相空間 Z に言及せず X, Y の言葉だけで言い換えることができる。位相空間 X, Y に対して、**評価写像 (evaluation map)** $\mathrm{ev} = \mathrm{ev}_{X,Y}\colon C(X,Y) \times X \to Y$ を $\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$ により定義する。

命題 1.2. X, Y を位相空間とする。$C(X,Y)$ 上の位相 $\mathcal{O}$ が admissible であるためには、評価写像 $\mathrm{ev}\colon C_{\mathcal{O}}(X,Y) \times X \to Y$ が連続であることが必要十分である。

証明. 位相 $\mathcal{O}$ が admissible であるとすると、位相空間 Z として特に $Z = C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ をとり、$g\colon Z \to C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ として恒等写像 id をとることにより、$\check{g} = \check{\mathrm{id}}$ は連続とわかる。ところが、$\check{\mathrm{id}}$ は ev に等しいから、ev は連続である。

逆に、$\mathrm{ev}\colon C_{\mathcal{O}}(X,Y) \times X \to Y$ が連続であるとして、$g\colon Z \to C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ を連続写像とする。このとき、$\check{g}$ は合成 $Z \times X \xrightarrow{g\times\mathrm{id}} C_{\mathcal{O}}(X,Y) \times X \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y$ に等しいから連続である。よって、$\mathcal{O}$ は admissible である。 $\square$

定義から分かるように、$C(X,Y)$ 上の位相は、強ければ強いほど admissible になりやすく、弱ければ弱いほど proper になりやすい（ここで、位相 $\mathcal{O}$ とはその開集合全体の族を意味するものとし、位相 $\mathcal{O}'$ が $\mathcal{O}$ より強いとは $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ を意味する)。これに関連して、次が成り立つ。

命題 1.3. $C(X,Y)$ 上の位相 $\mathcal{O}$ が proper であり $\mathcal{O}'$ が admissible ならば、$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ である。

証明. 位相 $\mathcal{O}'$ は admissible だから命題 1.2 により $\mathrm{ev}\colon C_{\mathcal{O}'}(X,Y) \times X \to Y$ は連続である。さらに、$\mathcal{O}$ は proper だから、$\widehat{\mathrm{ev}}\colon C_{\mathcal{O}'}(X,Y) \to C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ は連続となる。ところが、$\widehat{\mathrm{ev}}$ は集合 $C(X,Y)$ の恒等写像であるから、その連続性は $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ を意味する。 □

系 1.4. $C(X,Y)$ 上の proper かつ admissible な位相は、存在すれば一意的である。

証明. 位相 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ がともに proper かつ admissible であれば、命題 1.3 により $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ かつ $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ となるから、$\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ である。 □

Proper かつ admissible な $C(X,Y)$ 上の位相は任意の Z に対して全単射 $(\star\star)$ が存在するという意味で望ましいものであるが、そのようなものは存在すれば一意的であるということが分かった。実は、この後すぐに見るように、X が局所コンパクト Hausdorff の場合に、そのような位相は存在し、それはコンパクト開位相となる。

一般に、X, Y を位相空間、$A \subset X, B \subset Y$ とするとき、

$$[A,B] = \{f \in C(X,Y) \mid f(A) \subset B\}$$

と定義する。

定義 1.5. X, Y を位相空間とする。集合族

$$\{[K,V] \mid K \subset X \text{ はコンパクトで } V \subset Y \text{ は開集合 }\}$$

により生成される $C(X,Y)$ 上の位相を $C(X,Y)$ 上の **コンパクト開位相 (compact-open topology)** といい、$C(X,Y)$ にコンパクト開位相を導入して得られる空間を $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ と書く。

命題 1.6. 任意の位相空間 X, Y に対して、$C(X,Y)$ 上のコンパクト開位相は proper である。

証明. $f\colon Z \times X \to Y$ を連続とする。$\hat{f}\colon Z \to C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ の連続性を示せばよい。そこで、$z \in Z$ とし、$\hat{f}$ が z において連続であることを示す。そのため、X のコンパクト集合 K と Y の開集合 U に対して、$\hat{f}(z) \in [K,U]$ が成立するとしよう。これは $f(\{z\} \times K) \subset U$ すなわち $\{z\} \times K \subset f^{-1}(U)$ を意味する。K のコンパクト性から、z の開近傍 V が存在して、$V \times K \subset f^{-1}(U)$ が成立する。これは、$\hat{f}(V) \subset [K,U]$ を意味する。これで点 z において $\hat{f}$ が連続であることが分かった。 □

定理 1.7. X を局所コンパクト Hausdorff 空間のとき、任意の位相空間 Y に対して $C(X,Y)$ 上のコンパクト開位相は proper かつ admissible である。

証明. コンパクト開位相が proper であることは命題 1.6 で示したので、admissible であることを示せばよい。そこで、X を局所コンパクト Hausdorff 空間、$g\colon Z \to C_{\mathrm{co}}(X,Y)$

を連続写像、$(z,x)\in Z\times X$ とし、$\check{g}\colon Z\times X\to Y$ が点 (z,x) で連続であることを示そう。V を $\check{g}(z,x)=g(z)(x)$ の開近傍とする。$g(z)\colon X\to Y$ は連続であり X は局所コンパクト Hausdorff であるから、x のコンパクト近傍 K であって、$g(z)(K)\subset V$ となるものが存在する。これは $g(z)\in[K,V]$ を意味するから、g の連続性により、z の開近傍 U であって、$g(U)\subset[K,V]$ となるものが存在する。よって、$\check{g}(U\times K)\subset V$ である。これで点 (z,x) において $\check{g}$ が連続であることが分かった。 □

このようにして、X が局所コンパクト Hausdorff 空間である場合には、コンパクト開位相は $C(X,Y)$ 上の proper かつ admissible な唯一の位相として特徴づけられることが分かった。次の定理によれば、ここでの局所コンパクト性の仮定が必然的なものであることが分かる。位相空間 X が **Tychonoff 空間**であるとは、X の 1 点集合がすべて閉であり、かつ、$x\in X$ で $F\subset X$ が閉集合であり $x\notin F$ ならば連続関数 $f\colon X\to[0,1]$ であって $f(x)=1$ かつ $f|_{X\setminus F}=0$ となるものが存在することをいう。距離空間はもちろん Tychonoff 空間である。

定理 1.8. [Arens 1946-1] Tychonoff 空間 X 上の実数値連続関数の全体 $C(X,\mathbb{R})$ が proper かつ admissible な位相をもつならば、X は局所コンパクトである。

証明. $C(X,\mathbb{R})$ が proper かつ admissible な位相 $\mathcal{O}$ をもつとし、$x_0\in X$ とする。x_0 がコンパクトな近傍をもつことを示そう。まず、$\mathcal{O}$ は admissible であるから $\mathrm{ev}\colon C_{\mathcal{O}}(X,\mathbb{R})\times X\to\mathbb{R}$ は連続である。$f_0\in C(X,\mathbb{R})$ を常に 0 という値をとる定数関数とすると、$f_0(x_0)=0$ であるから、f_0 の $C_{\mathcal{O}}(X,\mathbb{R})$ における近傍 W および x_0 の X における近傍 U が存在して、$\mathrm{ev}(W\times U)\subset(-1,1)\subset\mathbb{R}$ が成り立つ。

さて、このとき閉包 $\overline{U}$ がコンパクトであることを示そう。X の開集合の族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\overline{U}\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ が成り立つとする。このとき $\mathcal{U}=\{X\setminus U\}\cup\{U_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ は X の開被覆であるが、これを用いて、$C(X,\mathbb{R})$ 上の新しい位相 $\mathcal{O}'$ を、集合族

$$\{[A,V]\mid A \text{ は } \mathcal{U} \text{ のある元に含まれる } X \text{ の閉集合で } V \text{ は } \mathbb{R} \text{ の開集合}\}$$

により生成される位相として定義する。

主張 1. 位相 $\mathcal{O}'$ は admissible である。

主張 1 の証明. 命題 1.2 により、評価写像 ev の連続性を示せばよい。$x\in X,\ f\in C(X,\mathbb{R})$ として、V を $\mathrm{ev}(x)=f(x)$ の $\mathbb{R}$ における開近傍とする。$U\in\mathcal{U}$ を $x\in U$ となるように取る。X は Tychonoff 空間（よって正則空間）であるから、x の X における閉近傍 A であって、$A\subset U\cap f^{-1}(V)$ となるものが存在する。このとき $[A,U]\times A$ は f の $C_{\mathcal{O}'}(X,\mathbb{R})\times X$ における近傍であって $\mathrm{ev}([A,U]\times A)\subset U$ を満たす。 □

主張 1 と命題 1.3 および $\mathcal{O}$ が proper であることにより、$\mathcal{O}\subset\mathcal{O}'$ が成り立つ。したがって、$\mathcal{U}$ のある元に含まれる X の閉集合 A_i および $\mathbb{R}$ における 0 の開近傍 $V_i\,(i=1,\ldots,n)$ が存在して $f_0\in\bigcap_{i=1}^n[A_i,V_i]\subset W$ となる。

主張 2. $\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ である。

主張 2 の証明. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とおくとき、$U \subset A$ を証明すれば十分である。もし、これが成立しないならば、$x \in U \setminus A$ が存在する。X は Tychonoff 空間であるから、$f(x) = 1$ かつ $f|_{(X \setminus U) \cup A} = 0$ となる連続関数 $f \colon X \to \mathbb{R}$ が存在する。すると、$f \in \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, V_i] \subset W$ であるから、$f(x) = \mathrm{ev}(f, x) \in \mathrm{ev}(W \times U) \subset (-1, 1)$ となり $f(x) = 1$ に反する。 □

さて、各 i に対して、A_i は $\mathcal{U}$ のある元に含まれる。したがって、$A_i \cap \overline{U} \neq \emptyset$ ならば、ある $\lambda_i \in \Lambda$ に対して $A_i \subset U_{\lambda_i}$ である。 主張 2 により、$\overline{U}$ はこのような U_{λ_i} すべての和集合に含まれる。よって、$\overline{U}$ はコンパクトである。 □

上の定理では、proper かつ admissible な位相の存在だけから（それがコンパクト開位相だと分かっていなくても）定義域の局所コンパクト性が導き出されていることに注意しておきたい。

コンパクト開位相における定義域の局所コンパクト性の役割については、筆者のブログ「トポロジーいろいろ」の中でも「局所コンパクト空間と exponentiability（2015 年 1 月 10 日投稿）」という記事ですでに論じている。そこでも上と類似した形の主張を述べたが、それを本稿の記法に合わせた形で引用しておく。証明は同記事を参照のこと。

定理 1.9. X を Hausdorff 空間とするとき、任意の位相空間 Y に対して $C(X, Y)$ 上のコンパクト開位相が proper かつ admissible であれば、X は局所コンパクトである。

ここでは、Y として任意の位相空間をとる必要がある[*1]上に、$C(X, Y)$ の proper かつ admissible な位相がコンパクト開位相であることまで仮定していることに注意したい。その代わり、X についての仮定は Tychonoff 空間から Hausdorff 空間に弱まっている。

定理 1.7 と定理 1.9 を合わせると、次を得る。

系 1.10. Hausdorff 空間 X について、次は同値である。

(1) X は局所コンパクトである。
(2) 任意の位相空間 Y に対して、$C(X, Y)$ 上のコンパクト開位相は proper かつ admissible である。 □

1.2 コンパクト開位相の諸性質

有用と思われるコンパクト開位相の性質をいくつか述べておく。いずれも自力で証明してみるとよい演習問題になると思われる。

[*1] 実際には、証明を見ればわかることだが、Y の動く範囲はパラコンパクト Hausdorff 空間だけで十分である。したがって、系 1.10 には次の項目を追加できる： (3) 任意のパラコンパクト Hausdorff 空間 Y に対して、$C(X, Y)$ 上のコンパクト開位相は proper かつ admissible である。

命題 1.11. 任意の位相空間 X, Y, Z, W と連続写像 $\varphi\colon Z \to X$, $\psi\colon Y \to W$ に対して、写像 $\varphi^*\colon C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to C_{\mathrm{co}}(Z,Y)$ および $\psi_*\colon C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to C_{\mathrm{co}}(X,W)$ は連続である。ここで、φ^*, ψ_* は $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $\psi_*(f) = \psi \circ f$ により定義される。

証明. $K \subset X$, $L \subset Z$ をコンパクト集合、$U \subset Y$, $V \subset W$ を開集合とすると

$$(\varphi^*)^{-1}([L,U]) = [\varphi(L), U], \quad \psi_*^{-1}([K,V]) = [K, \psi^{-1}(V)]$$

が成り立つことから分かる。 □

命題 1.12. X, Z を位相空間とし、Y を局所コンパクト Hausdorff 空間とする。このとき、合成

$$\circ\colon C_{\mathrm{co}}(Y,Z) \times C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to C_{\mathrm{co}}(X,Z), \qquad (g,f) \mapsto g \circ f$$

は連続である。

証明. $(f,g) \in C_{\mathrm{co}}(Y,Z) \times C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ における連続性を示すため、K を X のコンパクト集合、W を Z の開集合とし、$g \circ f \in [K,W]$ であるとする。このとき $f(K) \subset g^{-1}(W) \subset Y$ であるから、Y の局所コンパクト Hausdorff 性により、$f(K)$ のコンパクト近傍 L で、$L \subset g^{-1}(W)$ となるものが存在する。このとき、$V = \operatorname{Int} L$ とすれば、$f \in [K,V]$, $g \in [L,W]$ であって、$[L,W] \circ [K,V] \subset [K,W]$ である。 □

補題 1.13. X を Hausdorff 空間、Y を位相空間とし、Y の位相はその部分集合族 $\mathcal{S}$ から生成されているとする。このとき、$C(X,Y)$ 上のコンパクト開位相は、

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{[K,V] \mid K \text{ は } X \text{ のコンパクト集合で } V \in \mathcal{S}\}$$

により生成される。

証明. K を X のコンパクト集合、V を Y の開集合とするとき、$[K,V]$ が $\tilde{\mathcal{S}}$ で生成される位相に関して開集合であることを示せばよい。そこで、$f \in [K,V]$ とする。$f(K)$ はコンパクトで、$\mathcal{S}$ は Y の位相を生成するから、自然数 m, n と $V_{i,j} \in \mathcal{S}\,(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ が存在して $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n V_{i,j}$ となる。K はコンパクト Hausdorff であって $\{f^{-1}(\bigcap_{j=1}^n V_{i,j}) \mid i = 1, \ldots, m\}$ は K の有限開被覆だから、コンパクト集合 $K_i \subset K$ が存在して、$K_i \subset f^{-1}(\bigcap_{j=1}^n V_{i,j})$ かつ $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ である。このとき、$f \in \bigcap_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n [K_i, V_{i,j}] \subset [K,V]$ が成り立つ。よって、$[K,V]$ は $\tilde{\mathcal{S}}$ で生成される位相に関して開集合である。 □

命題 1.14. X を局所コンパクト Hausdorff 空間、Y を位相空間、Z を Hausdorff 空間とする。このとき、$C(X,Y)$ 上のコンパクト開位相は proper かつ admissible であるので全単射

$$\Phi\colon C_{\mathrm{co}}(Z \times X, Y) \to C_{\mathrm{co}}(Z, C_{\mathrm{co}}(X,Y)), \qquad f \mapsto \hat{f}$$

が存在するが、この写像 Φ は同相写像である。

証明. Φ および Φ^{-1} の連続性を示せばよい。Φ の連続性は、Z のコンパクト集合 K と X のコンパクト集合 L および Y の開集合 V に対して

$$\Phi^{-1}([K,[L,V]]) = [K \times L, V]$$

が成り立つことと、補題 1.13 から直ちに分かる。Φ^{-1} が連続であることを示すため、$g\colon Z \to C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ を連続写像、$C \subset Z \times X$ をコンパクト集合、$V \subset Y$ を開集合、$\Phi^{-1}(g) = \check{g} \in [C,V]$ とする。C の射影 $Z \times X \to Z$ による像を C_Z とする。C_Z はコンパクト Hausdorff で、X は局所コンパクト Hausdorff であって、$C_Z \times X$ のコンパクト集合 C は $C_Z \times X$ の開集合 $\check{g}^{-1}(V) \cap (C_Z \times X)$ に含まれる。よって、有限個のコンパクト集合 $K_i \subset C_Z$, $L_i \subset X$ $(i = 1, \ldots, n)$ が存在して、$C \subset \bigcup_{i=1}^n K_i \times L_i \subset \check{g}^{-1}(V)$ である。このとき $N = \bigcap_{i=1}^n [K_i, [L_i, V]]$ は g の開近傍で $\Phi^{-1}(N) \subset [C,V]$ である。 □

2 一様収束位相との関係、距離化可能性

2.1 一様収束位相とコンパクト開位相

X を位相空間、$Y = (Y,d)$ を距離空間とする。X 上の有界な実数値連続関数の全体 $C_B(X,Y)$ は距離

$$\bar{d}(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) \tag{$\sharp$}$$

により距離空間となる。ここで、$f\colon X \to Y$ が有界であるとは、$f(X)$ が距離空間 Y の有界部分集合であることをいう。もし、d が Y 上の完備な距離であれば、$\bar{d}$ も $C_B(X,Y)$ 上の完備な距離となることが簡単に分かる。

$C_B(X,Y) = C(X,Y)$ である場合、たとえば Y 自身が有界である場合や X がコンパクトである場合には、$C(X,Y)$ において距離 ($\sharp$) を定義することができる。このようにして $C_B(X,Y)$ あるいは $C(X,Y)$ 上に定まる位相を**一様収束位相 (topology of uniform convergence)** という[*2]。$C(X,Y)$ 上のコンパクト開位相は定義域 X と終域 Y の位相のみで決まっているのに対し、一様収束位相は Y の距離の取り方により変化するので注意が必要である。

まず、次の命題の意味で、一様収束位相の方がコンパクト開位相よりも強いことが分かる。Y の部分集合 A と $r > 0$ に対して、$B(A,r) = \bigcup_{a \in A} B(a,r) = \{y \in Y \mid$ ある $a \in A$ に対して $d(y,a) < r\}$ とする。

命題 2.1. 任意の位相空間 X および距離空間 Y に対して、$C_B(X,Y)$ 上の一様収束位相は、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ の部分空間としての位相よりも強い。

[*2] $C_B(X,Y) = C(X,Y)$ ではない場合も、$C(X,Y)$ 上に一様収束位相を次のようにして定義できる。まず、$d' = \min\{1, d\}$ とすることで有界距離 d' をつくり、これに関して ($\sharp$) と同様にして $\bar{d}'$ を定義し、それが定める位相を一様収束位相とする。$C_B(X,Y) = C(X,Y)$ である場合、一般に $\bar{d} \neq \bar{d}'$ であるが、両者の定める位相は一致する。

証明. $f \in C_B(X,Y)$ とし、$K \subset X$ をコンパクト集合、$U \subset Y$ を開集合、$f \in [K,U]$ とする。$f(K)$ は距離空間 Y のコンパクト集合で開集合 U に含まれるから、ある $\varepsilon > 0$ に対して、$B(f(K),\varepsilon) \subset U$ である。このとき、$B(f,\varepsilon) \subset [K,U]$ である。 □

距離空間 Y の部分集合 A に対して、$\operatorname{diam} A$ はその直径 $\sup_{a,b\in A} d(a,b) \in [0,\infty]$ を表すものとする。

命題 2.2. X がコンパクト Hausdorff 空間であるとき、任意の距離空間 Y に対して $C(X,Y) = C_B(X,Y)$ 上の一様収束位相とコンパクト開位相は一致する。

証明. 命題 2.1 により、一様収束位相についての開集合が、コンパクト開位相についても開集合であることを示せばよい。そこで、$f \in C(X,Y)$, $\varepsilon > 0$ として $B(f,\varepsilon)$ が コンパクト開位相について開集合となることを示す。X はコンパクト Hausdorff で、f は連続であるから、$X = \bigcup_{i=1}^n K_i$ となる有限個のコンパクト集合 K_i を $\operatorname{diam} f(K_i) < \varepsilon/2$ となるように取ることができる。$V_i = B(f(K_i),\varepsilon/2)$ とすれば、$N = \bigcap_{i=1}^n [K_i, V_i]$ は f のコンパクト開位相についての開近傍で、$N \subset B(f,\varepsilon)$ である。 □

系 2.3. X がコンパクト Hausdorff 空間、Y が距離化可能空間のとき、$C(X,Y)$ 上の一様収束位相は Y の位相と合致する距離のとり方にはよらない。 □

系 2.4. X がコンパクト Hausdorff 空間、$Y = (Y,d)$ が距離空間のとき、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ は距離化可能であり、その位相を与える距離の一つは

$$\bar{d}(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$$

で与えられる。 □

2.2 コンパクト開位相の距離化可能性

系 2.4 は $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ が距離化可能であるための一つの十分条件を与えている。この十分条件をもっと弱めることを考えてみよう。一般に（X が空でないとき）定数写像全体のなす $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ の部分空間は Y と同相である。このことから、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ が距離化可能であるためには Y が距離化可能でなければならないと分かる。次に定義域 X の条件として、次のようなものを考えよう。

定義 2.5. Hausdorff 空間 X が**半コンパクト (hemicompact)** であるとは、X のコンパクト集合の増大列 $(K_i)_{i=1}^\infty$ で、次を満たすものが存在することをいう :「X の任意のコンパクト集合 K に対して $i \geqq 1$ で $K \subset K_i$ となるものが存在する。」

上の定義での $(K_i)_{i=1}^\infty$ は $X = \bigcup_{i=1}^\infty K_i$ を自動的に満たしていることに注意する。もちろん、半コンパクト空間は σ コンパクト空間であり Lindelöf 空間である。局所コンパ

クトな可分距離空間や、可算 CW 複体（可算個の胞体からなる、必ずしも有限次元でない CW 複体）は半コンパクト空間であることが簡単に示される。

なお、第一可算な半コンパクト空間は局所コンパクトである[*3]。このことから、たとえば有理数全体 $\mathbb{Q}$ は半コンパクトでない σ コンパクト空間である。

定理 2.6. X が半コンパクト空間、Y が距離空間であるならば $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ は距離化可能である。

証明. X を半コンパクト空間とし、$(K_i)_{i=1}^{\infty}$ を定義 2.5 の通りのコンパクト集合の増大列とする。系 2.4 により、各 i に対して $C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$ は距離化可能である。よって、その可算積 $\prod_{i=1}^{\infty} C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$ は距離化可能である。さて、写像

$$\Phi\colon C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to \prod_{i=1}^{\infty} C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$$

を $\Phi(f)=(f|_{K_i})$ で定義すれば、$X=\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ であることから Φ は単射である。さらに、$\Phi_i = \mathrm{pr}_i \circ \Phi\colon C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$ を考えると、任意のコンパクト集合 $K \subset K_i$ および開集合 $V \subset Y$ に対して $\Phi_i^{-1}([K,V]) = [K,V] \subset C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ となるので、Φ_i は各 i について連続、よって Φ は連続である。さらに、Φ は像 $\mathrm{Im}\,\Phi$ への同相写像である。実際、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ と開集合 $V \subset Y$ を与えるとき、$n \geqq 1$ を $K \subset K_n$ となるように取れば、$\Phi([K,V]) = \mathrm{pr}_n^{-1}([K,V]) \cap \mathrm{Im}\,\Phi$ である。以上により、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ は距離化可能な空間 $\prod_{i=1}^{\infty} C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$ の部分空間と同相だから、距離化可能である。 □

注意 2.7. 一般に $(Z_i,d_i)\,(i=1,2,\ldots)$ が距離空間であるとき、可算積 $\prod_{i=1}^{\infty} Z_i$ は距離化可能な空間で、その位相と合致する距離の一つは $d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\min\{1,d(x_i,y_i)\}$ で与えられるのだった（ただし、$x=(x_i)$, $y=(y_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} Z_i$ とする）。このことを踏まえれば、上の命題の状況で $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ の位相と合致する距離 $\bar{d}$ として

$$\bar{d}(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-1}\min\{1, \bar{d}_i(f|_{K_i}, g|_{K_i})\}$$

が取れることが分かる。ここで、$\bar{d}_i$ は $(\sharp)$ と同様に定義される $C(K_i,Y)$ 上の距離とする。

定理 2.6 の証明の Φ が埋め込みであることから、**コンパクト開位相は**次の意味で**「広義一様収束の位相」である**ことが分かる。

[*3] これを示すため、第一可算な半コンパクト空間 X に対して $x \in X$ とする。$(K_n)_{n=1}^{\infty}$ を半コンパクト性の定義の通りの増大列とし、x の基本近傍系 $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ を選ぶ。もし、x がコンパクト近傍をもたないならば、各 n に対して $x_n \in U_n \setminus K_n$ を選ぶことができる。このとき $C=\{x\}\cup\{x_n \mid n=1,2,\ldots\}$ はコンパクトだから、ある n に対して $C \subset K_n$ だが、すると $x_n \in K_n$ となり矛盾する。

系 2.8. X が半コンパクト空間、Y が距離空間であるとき、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ において点列 (f_n) が f に収束することは、任意のコンパクト集合 K に対して $(f_n|_K)$ が $f|_K$ に一様収束することと同値である。 □

次に、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ が**完備距離化可能 (completely metrizable)** であるか、つまり、位相と合致した完備距離をもつかという問題を考えてみる。前に考察したように、Y は $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ に定数写像の全体として埋め込まれるが、Y が Hausdorff 空間であるときにその像が閉集合であることが簡単に分かる。したがって、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ が完備距離化可能ならば、Y も完備距離化可能でなければならない。単なる距離化可能性の場合は、これに加えて X が半コンパクトという条件だけを課せばよかったが、完備距離化可能性の場合には、さらなる条件を課す必要がある。

Hausdorff 空間 X が ***k* 空間**であるとは、$A \subset X$ が X の閉集合であることと、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して $A \cap K$ が K の閉集合になることが同値となることをいう。

定理 2.9. X が半コンパクト k 空間、Y が完備距離空間であるならば $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ は完備距離化可能である。

証明. 定理 2.6 の証明に用いた埋め込み

$$\Phi\colon C_{\mathrm{co}}(X,Y) \to \prod_{i=1}^{\infty} C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$$

において、Y は完備距離化可能であるから、$C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$ もそうであり、よって可算積 $P = \prod_{i=1}^{\infty} C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$ は完備距離化可能である。

あとは、像 $\operatorname{Im}\Phi$ が P の中で閉集合となることを示せばよい。それをみるため、任意のコンパクト集合 $K \subset X$ がある i に対して K_i に含まれることと、X が k 空間であることにより

$$\operatorname{Im}\Phi = \{(f_i) \in P \mid f_{i+1}|_{K_i} = f_i\,(i = 1, 2, \ldots)\} \tag{$\sharp\sharp$}$$

となることに注意しよう。上の式と命題 1.11 により、$\operatorname{Im}\Phi$ は P の閉集合となる。 □

注意 2.10. 式 ($\sharp\sharp$) といままでの証明から分かるように、X が半コンパクトな k 空間で $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ が定義 2.5 の通りのコンパクト集合の増大列であるとき[*4]、任意の位相空間 Y に対して $C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ は射影的極限 $\varprojlim C_{\mathrm{co}}(K_i,Y)$ として表される。

この定理での X が k 空間であるという条件は外すことができない。このことは次の例から分かる。

[*4] CW 複体 X に対して各 i 骨格 $X^{(i)}$ が有限個の胞体からなるとき、$K_i = X^{(i)}$ とすればこの状況が成立していることに注意する。

例 2.11. ∞ を $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に属していない点として、集合 $X=(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\cup\{\infty\}$ に次のようにして位相を定める。X の ∞ 以外の各点は孤立点とし、∞ における基本近傍系は

$$\left\{\{\infty\}\cup\bigcup_{m=k}^{\infty}(\{m\}\times(\mathbb{N}\setminus F_m))\,\middle|\, k\in\mathbb{N},\ F_m \text{ は } \mathbb{N} \text{ の有限部分集合 } (m\geqq k)\right\}$$

とする。このとき、X は明らかに Hausdorff 空間であって、$K\subset X$ がコンパクトであるのは有限集合であることと同値である。これと X が可算集合であることから、X は半コンパクトであることが分かる。また、X が k 空間でないことも直ちにわかる。単位閉区間 $I=[0,1]$ に対して、$C=C_{\mathrm{co}}(X,I)$ が完備距離化可能であったとして矛盾を導こう。

C の部分集合 A を

$$A=\left\{f\in C \,\middle|\, f(X)\subset\{0,1\} \text{ かつ、任意の } m\in\mathbb{N} \text{ に対して } f|_{\{m\}\times\mathbb{N}} \text{ は定数}\right\}$$

で定める。A は C の閉集合であるから完備距離化可能である。さらに、

$$A_n=\left\{f\in A \,\middle|\, f|_{\{k\,|\,k\geqq n\}\times\mathbb{N}} \text{ は定数}\right\}$$

とおくと A_n は A の閉集合となり、$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ が成り立つ。よって、Baire の範疇定理によれば、ある n に対して $\operatorname{Int}_A A_n\neq\emptyset$ でなければならない。しかし、これに反して $\operatorname{Int}_A A_n=\emptyset$ であることが次のように示される。$f\in A_n$ とし、$K_i\subset X$ をコンパクト、$U_i\subset I$ を開集合 $(i=1,\ldots,k)$ とし、$f\in\bigcap_{i=1}^{k}[K_i,U_i]$ であるとする。$K=\bigcup_{i=1}^{k}K_i$ は有限集合であるから、$K\setminus\{\infty\}$ の元の第一成分に現れるすべての自然数よりも大きな $M\in\mathbb{N}$ が存在する。f が $\{M\}\times\mathbb{N}$ 上でとる一定値を $\varepsilon\in\{0,1\}$ とするとき、$g\in A$ を、$g(\infty)=f(\infty), g(M,n)=1-\varepsilon,\ m\neq N$ のとき $g(m,n)=f(m,n)$ として定義することができる。 このとき $g\in\bigcap_{i=1}^{k}[K_i,U_i]\setminus A_n$ である。したがって、$\operatorname{Int}_{A_n}A=\emptyset$ であり、これは矛盾である。

したがって、$C_{\mathrm{co}}(X,I)$ は完備距離化可能ではない。

注意 2.12. 上の例における X は、有名な反例集 [Steen-Seebach] の 26 番目に掲載されている "Arens-Fort space" と実質的に同じものである。

最後に、$C_{\mathrm{co}}(X,Y)$ が距離化可能であるために X の半コンパクト性が本質的であることを示す次の結果を紹介してこの節を終わる。

定理 2.13. X を Tychonoff 空間とする。$C_{\mathrm{co}}(X,\mathbb{R})$ が第一可算ならば、X は半コンパクトである（したがって、$C_{\mathrm{co}}(X,\mathbb{R})$ は距離化可能となる)。

証明. $X\neq\emptyset$ としてよい。$f_0\colon X\to\mathbb{R}$ を常に 0 という値をとる定数関数とする。$C_{\mathrm{co}}(X,\mathbb{R})$ が第一可算であるとすると、f_0 は可算な基本近傍系 $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ をもつ。各 i に対して、$N_i=[K_i,U_i]$（$\emptyset\neq K_i\subset X$ はコンパクト、$U_i\subset\mathbb{R}$ は開集合）の形であるとしてよい。実際、$f_0\in[K,U]\cap[K',U']$ ならば $0\in U\cap U'$ なので $f_0\in[K\cup K,U\cap U']\subset$

$[K,U]\cap[K',U']$ となるからである。さらに、K_i を $K_1\cup\cdots\cup K_i$ に置き換えることで、$K_i\subset K_{i+1}$ とできる。

このとき、増大列 $(K_i)_{i=1}^{\infty}$ が半コンパクト性の定義の条件を満たすことを示そう。$K\subset X$ をコンパクト集合とする。$W=(-1,1)\subset\mathbb{R}$ に対して $[K,W]$ は f_0 の開近傍なので、ある i に対して $[K_i,U_i]\subset[K,W]$ が成り立つ。もし、$K\not\subset K_i$ であれば、$x\in K\setminus K_i$ が存在するが、このとき X が Tychonoff であることより $f\in C_{\mathrm{co}}(X,\mathbb{R})$ を $f|_{K_i}=0$ かつ $f(x)=1$ となるように取ることができる。すると、$f\in[K_i,U_i]$ かつ $f\notin[K,W]$ となるので、矛盾する。よって、$K\subset K_i$ であり、$(K_i)_{i=1}^{\infty}$ が半コンパクト性の定義の条件を満たす。 □

3 コンパクト開位相をもった同相群

位相空間 X に対して、X からそれ自身への同相写像全体は、合成に関して群をなす。この群を X の**同相群**といい、$H(X)$ で表す。$H(X)$ は X から X への連続写像からなっているので、コンパクト開位相を入れた写像空間 $C_{\mathrm{co}}(X,X)$ からの相対位相を導入することができる。以下、$H(X)$ にはこの位相が入っているものとする。

以下では、同相群 $H(X)$ が位相群になるための十分条件について考える。位相をもった群 G が**パラ位相群 (paratopological group)** であるとは、それが位相モノイドであること、すなわち、乗法 $G\times G\to G$ が連続であることをいうのであった。命題 1.12 から直ちに、次が分かる。

命題 3.1. X が局所コンパクト Hausdorff 空間ならば、$H(X)$ はパラ位相群である。 □

一般に、X が局所コンパクト Hausdorff という条件だけでは、$H(X)$ において逆元をとる演算 $h\mapsto h^{-1}$ が連続であるとはいえない（例 3.5)。しかし、X がコンパクトであれば $H(X)$ は位相群となる。

命題 3.2. X がコンパクト Hausdorff 空間ならば、$H(X)$ は位相群である。

証明. 命題 3.1 により、逆元をとる写像 $\iota\colon H(X)\to H(X), h\mapsto h^{-1}$ の連続性をいえばよい。X がコンパクト Hausdorff であるとき、$K,U\subset X$ がそれぞれコンパクト集合、開集合であれば $X\setminus K, X\setminus U$ はそれぞれ X の開集合、コンパクト集合となる。このことと

$$\iota^{-1}([K,U])=\iota([K,U])=[X\setminus U,X\setminus K]$$

により、ι は連続である。 □

X がコンパクトでない局所コンパクト Hausdorff 空間の場合には、$H(X)$ が位相群となるために X にどのような条件を課せばよいだろうか。そのような条件としては局所連

結性が古典的によく知られていた [Arens 1946-2][*5]。しかし、比較的最近になって、局所連結性という条件は弱められることが Dijkstra によって示されているので、この改良された結果を紹介しよう。

まず、以下の考察から出発する。局所コンパクト Hausdorff 空間 X に対して、$\alpha X = X \cup \{\infty\}$ を X の一点コンパクト化とする。主に関心があるのは X がコンパクトでない場合であるが、X がコンパクトの場合、αX は X と一点空間 $\{\infty\}$ との直和であると定義しておく。$H(\alpha X)$ の部分群 $H_\infty(\alpha X)$ を

$$H_\infty(\alpha X) = \{h \in H(\alpha X) \mid h(\infty) = \infty\}$$

で定義する。$H(\alpha X)$ は命題 3.2 により位相群となるから、その部分群として $H_\infty(\alpha X)$ は位相群となる。写像 $\varphi\colon H_\infty(\alpha X) \to H(X)$ を $\varphi(h) = h|_X$ で定義することができ、これは容易にわかるとおり群の同型写像となる。

以下、混乱を防ぐために次の記号を用いる。$A, B \subset \alpha X$ のとき、

$$[A, B]_{\alpha X} = \{f \in C(\alpha X, \alpha X) \mid f(A) \subset B\}$$

とし、さらに $A, B \subset X$ であるとき、

$$[A, B]_X = \{f \in C(X, X) \mid f(A) \subset B\}$$

とする。

補題 3.3. 上の状況で、次が成り立つ。

(1) $\varphi\colon H_\infty(\alpha X) \to H(X)$ は連続である。
(2) φ^{-1} が連続ならば、$H(X)$ は位相群である。

証明. (1) K, U をそれぞれ X のコンパクト集合、開集合とすると、K, U は αX においてもコンパクト集合、開集合であって $\varphi^{-1}([K, U]_X \cap H(X)) = [K, U]_{\alpha X} \cap H_\infty(\alpha X)$ となることから分かる。

(2) φ^{-1} が連続であるとすると、(1) により、$\varphi\colon H_\infty(\alpha X) \to H(X)$ は群の同型であると同時に同相写像である。$H_\infty(\alpha X)$ は位相群であるから、$H(X)$ も位相群である。 □

定理 3.4. [Dijkstra 2005] X が局所コンパクト Hausdorff 空間であり、任意の $x \in X$ に対して x の X におけるコンパクトかつ連結な近傍が存在するならば、$H(X)$ は位相群である。

証明. 補題 3.3 により、$\varphi^{-1}\colon H(X) \to H_\infty(\alpha X)$ の連続性を示せばよい。それには、φ^{-1} の $\mathrm{id} \in H(X)$ における連続性を示せば十分である。実際、任意の $h \in H(X)$ に対して

[*5] 位相空間 X が**局所連結 (locally connected)** であるとは、任意の $x \in X$ と x の X における任意の近傍 U に対して、x の連結開近傍 V であって $V \subset U$ となるものが存在することをいう。

φ^{-1} は合成

$$H(X) \xrightarrow{\tau_{h^{-1}}} H(X) \xrightarrow{\varphi^{-1}} H_\infty(\alpha X) \xrightarrow{\tau_{\varphi(h)}} H_\infty(\alpha X)$$

に等しい（ここで、$\tau_{h^{-1}}, \tau_{\varphi(h)}$ はそれぞれ左側に h^{-1}, $\varphi(h)$ をかけるという同相写像である)。この合成が h において連続であることは、φ^{-1} が id において連続であることと同値である。

そこで、K, U をそれぞれ αX のコンパクト集合、開集合とし、$\mathrm{id} = \varphi^{-1}(\mathrm{id}) \in [K, U]_{\alpha X}$ とする。つまり、$K \subset U$ であるとする。このとき、id の $H(X)$ における近傍 W で $\varphi^{-1}(W) \subset [K, U]$ となるものを見つけたい。

もし $K \subset X$ であれば、$W = [K, U \setminus \{\infty\}]_X \cap H(X)$ とおけば W は id の $H(X)$ における開近傍で、$\varphi^{-1}(W) \subset [K, U]_{\alpha X}$ となる。

そこで、$K \not\subset X$ つまり $\infty \in K$ の場合を考える。このとき $K \subset U$ により $\infty \in U$ であるから、$C = \alpha X \setminus U$ とおくと、C は X のコンパクト集合である。また、$F = K \setminus \{\infty\}$ は X の閉集合となる。 また $X \setminus C = U \setminus \{\infty\}$ であるから、

$$W = [F, X \setminus C]_X \cap H(X)$$

とおくと $\mathrm{id} \in W$ および $\varphi^{-1}(W) \subset [K, U]_{\alpha X}$ が成り立つ。あとは、W が $H(X)$ における id の近傍をなしていることを示せばよい。

$C \subset X$ はコンパクトであるから、仮定により、$C \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$ となるような連結かつコンパクトな $D_i \subset X\,(i = 1, \ldots, n)$ がある。$D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ とおくと、X の局所コンパクト性から、D の X におけるコンパクト近傍 D' が存在する。さらに、各 i に対して $x_i \in \mathrm{Int}_X\, D_i$ を固定しておく。

主張 3. $f \in H(X)$ が $f(X \setminus D') \cap D \neq \emptyset$ および $f(x_i) \in D_i\,(i = 1, \ldots, n)$ を満たすならば、$f(\mathrm{Bd}_X\, D') \cap D \neq \emptyset$ である。

主張 3 の証明. f を仮定の通りとすると、ある i に対して、$f(X \setminus D') \cap D_i \neq \emptyset$ である。したがって、$f^{-1}(D_i) \cap (X \setminus D') \neq \emptyset$ である。一方、$x_i \in f^{-1}(D_i)$, $x_i \in D_i \subset D'$ であるので、$f^{-1}(D_i) \cap D' \neq \emptyset$ である。$f^{-1}(D_i)$ は連結で、D' と $X \setminus D'$ の両方と交わるから、$f^{-1}(D_i) \cap \mathrm{Bd}_X\, D' \neq \emptyset$ でなければならない。これを言い換えると $f(\mathrm{Bd}_X\, D') \cap D_i \neq \emptyset$ である。したがって、 $f(\mathrm{Bd}_X\, D') \cap D \neq \emptyset$ となる。 □

そこで、

$$O = H(X) \cap [F \cap D', X \setminus C]_X \cap [\mathrm{Bd}_X\, D', X \setminus D]_X \cap \bigcap_{i=1}^n [\{x_i\}, \mathrm{Int}_X\, D_i]_X$$

とおくと、O は $H(X)$ における id の開近傍である。

さらに、$O \subset W$ である。実際、$f \in O$ かつ $f \notin W = [F, X \setminus C]_X \cap H(X)$ であるとすると、$f(F) \cap C \neq \emptyset$ かつ $f \in [F \cap D', X \setminus C]_X$ であることから $f(F \setminus D') \cap C \neq \emptyset$ したがって $f(X \setminus D') \cap D \neq \emptyset$ であり、さらに $f \in [\{x_i\}, \mathrm{Int}_X\, D_i]_X$ であるから

$f(x_i) \in D_i\,(i = 1, \ldots, n)$ である。よって、主張 3 により $f(\mathrm{Bd}_X D') \cap D \neq \emptyset$ であるが、これは $f \in [\mathrm{Bd}_X D', X \setminus D]_X$ であることに反する。よって、$O \subset W$ であるから W は id の $H(X)$ における近傍をなす。 □

例 3.5. X が局所コンパクト距離空間であっても、$H(X)$ が位相群になるとは限らない。例えば、X をカントール集合から一点を除いて得られる空間とする。記述を具体的にするため、次のように定義しよう。まず、C を通常のカントール三進集合とする。すなわち、

$$C_n = \bigcup_{a_i \in \{0,1\},\, i=1,\ldots,n} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{3^i},\ \frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{3^i} \right]$$

とおき、$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_n \subset \mathbb{R}$ とする。そして $X = C \setminus \{0\}$ と定義する。同相写像 $h_n \colon C \to C\,(n = 1, 2, \ldots)$ を

$$h_n(x) = \begin{cases} 3x & x \in [0, 1/3^{n+1}] \text{ のとき} \\ x - 1/3^n + 1 & x \in [2/3^{n+1}, 1/3^n] \text{ のとき} \\ 3^{-1}(x - (1 - 1/3^n)) + (1 - 1/3^n) & x \in [1 - 1/3^n, 1] \text{ のとき} \\ x & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定めると、$h_n \in H(C)$, $h(0) = 0$ だから、$\bar{h}_n = h_n|_X \in H(X)$ である。すると、任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して $\bar{h}_n|_{[\varepsilon,1]}$ は $n \to \infty$ のとき id に一様収束するから、$H(X)$ において $\bar{h}_n \to \mathrm{id}$ である。一方、任意の n に対して $\bar{h}_n^{-1}(1) = 1/3^n$ であるから、$\bar{h}_n^{-1} \not\to \mathrm{id}$ である（グラフを描くことで容易に理解できるだろう）。

参考文献

[Arens 1946-1] R. Arens, *A topology for spaces of transformations*, Ann. of Math. (2) **47** (1946), 480–495.

[Arens 1946-2] R. Arens, *Topologies for homeomorphism groups*, Amer. J. Math. **68** (1946), 593–610.

[Arens-Dugundji 1951] R. Arens and J. Dugundji, *Topologies for function spaces*, Pacific J. Math. **1** (1951), 5–31.

[Dijkstra 2005] J. J. Dijkstra, *On homeomorphism groups and the compact-open topology*, Amer. Math. Monthly **112** (2005), no. 10, 910–912.

[Steen-Seebach] L. A. Steen and J. A. Seebach, Jr. Counterexamples in topology, Reprint of the second (1978) edition, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995.